Algebra I: Final 2004 Solutions

June 24, 2004

1. H を群 G の空でない部分集合で $x \in H$ かつ $y \in H \Rightarrow xy^{-1} \in H$ を満たすとする。

   (a) H は G の部分群であることを証明せよ。

   解.　仮定より $\emptyset \neq H \subset G$ だから $a \in H$ を一つはとれる。仮定の $x = y = a$ とすると、$1 = aa^{-1} \in H$ だから G の単位元 1 は H に含まれる。ここで、$\forall a \in H$ に対して、仮定の $x = 1, y = a$ とすると、$a^{-1} = 1a^{-1} \in H$ だから、a の G における逆元は H に含まれる。ここで、$\forall a \in H, \forall b \in H$ に対して、$ab = a(b^{-1})^{-1} \in H$ だから H は演算に関して閉じている。ここでは、$b^{-1} \in H$ を用いた。したがって、H は G の空でない部分集合で、かつ、$\forall a \in H, \forall b \in H$ に対して、$a^{-1} \in H$ かつ $ab \in H$ が証明されたから、H は G の部分群である。

   (b) $a \in G$ とする。aH が G の部分群ならば $a \in H$ であることを証明せよ。

   解.　aH が G の部分群ならば、$1 \in aH$ である。したがって、$1 = ah$ $(h \in H)$ と書くことができる。H が部分群であることは (a) で示されたから、$h^{-1} \in H$ したがって、$H \ni h^{-1} = 1h^{-1} = ahh^{-1} = a$。これで $a \in H$ が示された。

   (c) $A \subset G$ としたとき、$H \cap AH \neq \emptyset$ ならば $A \cap H \neq \emptyset$ であることを証明せよ。

   解.　$H \cap AH \neq \emptyset$ だから $h \in H \cap AH$ をとることができる。$h \in H$ であるが、$h \in AH$ でもあるので、$h = ah'$ $(a \in A,\ h' \in H)$ と書くことができる。H は G の部分群だから、$hh'^{-1} \in H$ である。したがって、

   $$H \ni hh'^{-1} = ah'h'^{-1} = a \in A$$

   となる。これは、$a \in A \cap H$ を意味するから、$A \cap H \neq \emptyset$ である。

   (d) $A \subset G$ としたとき、$AH \subset H$ ならば $A \subset H$ である。さらに $A \neq \emptyset$ ならば、$AH = H$ であることを証明せよ。

   解.　H は G の部分群だから、$1 \in H$ である。したがって、$A = A1 \subset AH \subset H$、すなわち、$A \subset H$ が証明された。ここで、$A \neq \emptyset$ を仮定する。$a \in A$ とする。$AH \subset H$ であるから、$AH \supset H$ を示せば良い。これは、

   $$H = 1H \subset aa^{-1}H \subset aH^{-1}H \subset aH \subset AH$$

   より得られる。H は G の部分群だから、$H^{-1}H \subset H$ を用いた。

2. $n \geq 2$ を自然数とし、$f : G \longrightarrow \boldsymbol{Z}_n$ を、群 G から群 $\boldsymbol{Z}_n$ への準同型写像とする。また、H を G の部分群、$K = Kerf = \{x \in G \mid f(x) = 1_{\boldsymbol{Z}_n} = \overline{0}\}$ とする。

   (a) G/K は巡回群であることを証明せよ。

   解.　まず、$\boldsymbol{Z}_n =< \overline{1} >$ であり、巡回群である。$K = Kerf$ だから、準同型定理により、$G/K \simeq Imf \leq \boldsymbol{Z}_n$ である。Imf は $\boldsymbol{Z}_n$ の部分群で、巡回群の部分群はまた、巡回群だから、Imf は巡回群。したがって、G/K も巡回群である。

   (b) HK は G の正規部分群であることを証明せよ。

   解.　まず、$K = Kerf$ は G の正規部分群であった。したがって、$1 \in H, 1 \in K$ で、$\emptyset \neq HK \subset G$ は明らか。$hk, h'k' \in HK$ $(h, h' \in H,\ k, k' \in K)$ とする。K が G の正規部分群であることを用いると、$kk'^{-1}h \ni Kh = hK$ だから、$kk'^{-1}h'^{-1} = h'^{-1}k''$ となる $k'' \in K$ をとることができる。1.(a) より、HK が G の部分群であることを

示すには、$(hk)(h'k')^{-1} \in HK$ を満たせば良い。これは、次のようにして確かめられる。

$$(hk)(h'k')^{-1} = hkk'^{-1}h'^{-1} = hh'^{-1}k'' \in HH^{-1}K \subset HK.$$

さて、G/K が巡回群、特に、可換群であることを用いて、$x^{-1}HKx \subset HK$ を示す。ここで、$x \in G$。$a \in HK$ に対して、

$$x^{-1}ax \in (x^{-1}K)(aK)(xK) = (x^{-1}K)(xK)(aK) = aK \subset HKK \subset HK.$$

別解としては、$HK = f^{-1}(f(H))$ であることを示し、$f(H)$ はアーベル群の部分群だから、$\boldsymbol{Z}_n$ の正規部分群である。したがって、その原像（逆像）は正規部分群。という道筋で証明しても良い。

(c) $a \in G$ とすると、$a^n \in K$ であることを証明せよ。

解.　$\boldsymbol{Z}_n$ は位数 n の巡回群で、演算は加法だから、任意の元の n 倍は $\bar{0}$ である。そこで、$a \in G$ とすると、$f(a^n) = n \cdot f(a) = \bar{0} = 1_{\boldsymbol{Z}_n}$. したがって、$a^n \in K$ である。

3. G を位数 6 の群、$\mathcal{X} = \{S \subset G \mid |S| = 3\}$ すなわち、G の部分集合で元の個数が 3 のもの全体とする。そのようなものは、${}_6C_3$ 個あるから、$|\mathcal{X}| = 20$ である。

(a) $x \in G$、$S \in \mathcal{X}$ とすると、$x^{-1}S \in \mathcal{X}$ であることを示し、特に、次の写像により、$\mathcal{X}$ は G 集合となることを示せ。

$$f : \mathcal{X} \times G \to \mathcal{X}\ ((S, x) \mapsto x^{-1}S)$$

解.　$g : S \to x^{-1}S\ (s \mapsto x^{-1}s)$ とすると、これは、全射であることは、明らか。単射を示す。$g(s) = g(s')$ $(s, s' \in S)$ とすると、

$$s = xx^{-1}s = xg(s) = xg(s') = xx^{-1}s' = s'.$$

g は全単射だから、$|x^{-1}S| = 3$ で $x^{-1}S \in \mathcal{X}$。ここで、$f(S, x) = x^{-1}S$ を S^x とおき、$S^1 = S$, $S^{xy} = (S^x)^y$ $(x, y \in S)$ を示せば良い。

$$S^1 = 1^{-1}S = 1S = S,\ S^{xy} = (xy)^{-1}S = y^{-1}(x^{-1}S) = y^{-1}S^x = (S^x)^y.$$

(b) $S \in \mathcal{X}$ を通る G 軌道は $A = \{x^{-1}S \mid x \in G\}$ であるが、$|A|$ は 2 か 3 か 6 のいずれかであることを証明せよ。

解.　$G_S = \{x \in G \mid S^x = S\} = \{x \in G \mid x^{-1}S = S\}$ とすると、G_S は G の部分群（安定化部分群と呼ばれる）で、$|A| = |G : G_S|$ であった。ラグランジュの定理より、$|G| = |G : G_S||G_S|$ だから、$|G : G_S|$ は $|G| = 6$ の約数である。したがって、$|A| = 1, 2, 3, 6$ のいずれかである。$S \subset G$ だから、$GS = G$ で $G \neq G_S$ だから、$|A| \neq 1$。これより、$|A| = 2, 3, 6$ のいずれかである。

(c) G には位数 3 の正規部分群が必ず存在することを証明せよ。（ヒント：G 軌道の長さが 2 であるものが必ず存在することを証明する。）

解.　前問で すべての軌道の長さが 3 か 6 とする。$|\mathcal{X}| = 20$ だから、それは不可能。したがって、ある軌道 A で $|A| = 2$ となるものがある。$2 = |A| = |G : G_S| = |G|/|G_S| = 6/|G_S|$ だから、$|G_S| = 3$ すなわち、位数 3 の部分群が存在した。ところが、$|G : G_S| = 2$ で指数が 2 の部分群はすべて正規部分群だから、G_S は 位数が 3 の正規部分群である。最後の部分は、$H = G_S$ とおき、$x \notin H$ とすると、$G = H \cup xH = H \cup Hx$ より、$xH = Hx$ がえられることによる。

Algebra I: Final 2004

June 24, 2004

解答用紙のすべてに ID と名前を書いて下さい。

1. H を群 G の空でない部分集合で次の条件を満たすとする。

$$x \in H \text{ かつ } y \in H \Rightarrow xy^{-1} \in H.$$

   (a) H は G の部分群であることを証明せよ。

   (b) $a \in G$ とする。aH が G の部分群ならば $a \in H$ であることを証明せよ。

   (c) $A \subset G$ としたとき、$H \cap AH \neq \emptyset$ ならば $A \cap H \neq \emptyset$ であることを証明せよ。

   (d) $A \subset G$ としたとき、$AH \subset H$ ならば $A \subset H$ である。さらに $A \neq \emptyset$ ならば、$AH = H$ であることを証明せよ。

2. $n \geq 2$ を自然数とし、$\boldsymbol{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$ を 次のように演算を定義した群とする。

$$\overline{i} + \overline{j} = \overline{i + j \text{ を } n \text{ で割った余り}}$$

   $f : G \longrightarrow \boldsymbol{Z}_n$ を、群 G から群 $\boldsymbol{Z}_n$ への準同型写像とする。また、H を G の部分群、$K = Kerf = \{x \in G \mid f(x) = 1_{\boldsymbol{Z}_n} = \overline{0}\}$ とする。

   (a) G/K は巡回群であることを証明せよ。

   (b) HK は G の正規部分群であることを証明せよ。

   (c) $a \in G$ とすると、$a^n \in K$ であることを証明せよ。

3. G を位数 6 の群、$\mathcal{X} = \{S \subset G \mid |S| = 3\}$ すなわち、G の部分集合で元の個数が 3 のもの全体とする。そのようなものは、${}_6C_3$ 個あるから、$|\mathcal{X}| = 20$ である。

   (a) $x \in G$、$S \in \mathcal{X}$ とすると、$x^{-1}S \in \mathcal{X}$ であることを示し、特に、次の写像により、$\mathcal{X}$ は G 集合となることを示せ。

$$f : \mathcal{X} \times G \to \mathcal{X} \ ((S, x) \mapsto x^{-1}S)$$

   (b) $S \in \mathcal{X}$ を通る G 軌道は $A = \{x^{-1}S \mid x \in G\}$ であるが、$|A|$ は 2 か 3 か 6 のいずれかであることを証明せよ。

   (c) G には位数 3 の正規部分群が必ず存在することを証明せよ。（ヒント：G 軌道の長さが 2 であるものが必ず存在することを証明する。）

Message をお願いします: 「ホームページ掲載不可」の場合は明記のこと

(1) この授業または群論について。特に授業の改善点について。

(2) ICU の教育一般について。特に改善点について。