Algebra II : PROBLEMS

1 環、体、整域

1.1 p を素数とする。$\boldsymbol{Z}_{(p)}$ により、有理数 m/n で、$(m,n)=(p,n)=1$ なるもの全体を表すものとする。(即ち既約分数として表したとき分母が p で割れないもの全体。) このとき、$\boldsymbol{Z}_{(p)}$ は整域となることを示せ。

1.2 環 R の正則元は、左（右）零因子ではないことを示せ。

1.3 体は、整域であることを示せ。

1.4 $\boldsymbol{Z}_{12}$ の正則元と、零因子をすべて求めよ。

1.5 $\boldsymbol{Z}_n$ $(n \geq 2)$ の零因子は、$\bar{a}$ ($(a,n) \neq 1$) と書けることを示せ。ここで (a,n) は a と n の最大公約数を表す。

1.6 $\boldsymbol{Z}_n$ $(n \geq 2)$ が整域であるのは、n が素数の時で、またそのときに限ることを示せ。

1.7 $\boldsymbol{Z}_n$ $(n \geq 2)$ が整域ならば体であることを。

1.8 K を体とするとき、$M(n,K)$ の左（右）零因子は、非正則行列であり、また逆に、非正則行列は、左（右）零因子であることを示せ。

1.9 R が整域ならば、R を係数とする多項式環 $R[x_1,\ldots,x_n]$ も整域であることを示せ。

1.10 R を整域とするとき、$U(R[x_1,\ldots,x_n]) = U(R)$ であることを示せ。

1.11 有限個の元からなる整域は体であることを示せ。

1.12 R を整域とし、$0 \neq f(x) \in R[x]$、$\deg f = n$ とすると、$f(x)$ の相異なる根の数は、n 以下であることを示せ。

1.13 R を無限個の元を含む整域としたとき、$f,\, g \in R[x]$、$f \neq g$ ならば、R の元 α で、$f(\alpha) \neq g(\alpha)$ となるものが存在することを示せ。

1.14 R を、無限個の元を含む整域とする。
(1) $f,\, g \in R[x_1,\ldots,x_n]$、$f \neq g$ とすると、$\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in R$ で、$f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \neq g(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ となるものが存在することを示せ。
(2) $f,\, g_1,\ldots,g_r \in R[x_1,\ldots,x_n]$ とし、$g_1,\ldots,g_r$ は、すべては零でないとする。もし、$g_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \neq 0$ $(i=1,\ldots,r)$ を満たすすべての $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in R$ について、$f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = 0$ となっていれば、f は、多項式として $f(x_1,\ldots,x_n) = 0$ であることを示せ。

2 イデアルと剰余環

2.1 環 R の左（右、両側）イデアル I, J に対して、$I \cap J$、$I + J$ は共に、左（右、両側）イデアルであることを示せ。

2.2 I, J が環 R の両側イデアルならば、IJ も、両側イデアルで、$IJ \subset I \cap J$ を満たすことを示せ。また、等号が成り立たない例をあげよ。

2.3 R を整域、$a, b \in R$ とするとき、次を示せ。

$$(a) = (b) \Leftrightarrow b = au \quad \text{となる} \quad u \in U(R) \quad \text{が存在する。}$$

2.4 $\{a + b\sqrt{-1} | a, b \in \boldsymbol{Z}\}$ を、$\boldsymbol{Z}[\sqrt{-1}]$ で表し、ガウスの整数環と呼ぶ。
(1) $\boldsymbol{Z}[\sqrt{-1}]$ は、複素数体 $\boldsymbol{C}$ の和と積に関して閉じており、整域となることを示せ。
(2) $\alpha = a + b\sqrt{-1}$ に対して、$N(\alpha) = a^2 + b^2$ とすると、$N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$ が成り立つことを示せ。
(3) $\boldsymbol{Z}[\sqrt{-1}]$ の正則元について次が成り立つことを示せ。

$$\alpha \in U(\boldsymbol{Z}[\sqrt{-1}]) \Leftrightarrow N(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \alpha \in \{\pm 1, \pm\sqrt{-1}\}.$$

2.5 $\boldsymbol{Z}[\sqrt{-1}]$ において、$\phi : \boldsymbol{Z}[\sqrt{-1}] \to \{0\} \cup \boldsymbol{N}$ $(\alpha \mapsto N(\alpha))$ をとると、$\boldsymbol{Z}[\sqrt{-1}]$ は、ユークリッド整域となることを示せ。(Hint：$\alpha, \beta \in \boldsymbol{Z}[\sqrt{-1}], \alpha \neq 0$ に対して、$\beta = \gamma\alpha + \epsilon$ $N(\epsilon) < N(\alpha)$ なる $\gamma, \epsilon \in \boldsymbol{Z}[\sqrt{-1}]$ を見つけたい。$\beta/\alpha = r + s\sqrt{-1}$, $r, s \in \boldsymbol{Q}$ とし、$|m - r| \leq 1/2$, $|n - s| \leq 1/2$ となる $m, n \in \boldsymbol{Z}$ を取り、$\gamma = m + n\sqrt{-1}$ ととれ。)

2.6 $R = K[x, y]$ を、体 K 上の２変数多項式環とすると、R は、単項イデアル整域ではないことを示せ。(Hint：例えば、$Rx + Ry$ は、単項ではないイデアルであることを示せ。)

2.7 R を単項イデアル整域とする。$a, b \in R$ において、R の元 c で、$b = ca$ を満たすものがあるとき、$a|b$ と書くものとする。R の元 $a_1, \ldots, a_n$ に対して、$d|a_i$ $(1 \leq i \leq n)$ となる元 d を、これらの元の公約元といい、$a_i|m$ $(1 \leq i \leq n)$ となる元 m を、これらの元の公倍元という。また、R の元 d が、次の条件を満たすとき、d は、$a_1, \ldots, a_n$ の最大公約元（略して GCD）であるという。

(a) d は、$a_1, \ldots, a_n$ の公約元。

(b) c が、$a_1, \ldots, a_n$ の公約元ならば $c|d$。

また、R の元 l が、次の条件を満たすとき、l は、$a_1, \ldots, a_n$ の最小公倍元（略して LCM）であるという。

(a) l は、$a_1, \ldots, a_n$ の公倍元。

(b) m が、$a_1, \ldots, a_n$ の公倍元ならば $l|m$。

このとき、 $(a_1) + \cdots + (a_n) = (d)$、$(a_1) \cap \cdots \cap (a_n) = (l)$ であり特に、GCD、LCM は、それぞれ、正則元倍を除いて、一意的に決まることを示せ。

3 準同型定理

3.1 部分環は環であることを示せ。

3.2 $f : R \to R'$ を環準同型とするとき次を示せ。
(1) Ker$f$ は R の両側イデアル。
(2) Imf は R' の部分環。

3.3 $f : R \to R'$ を環の同型写像とする。このとき、$f^{-1} : R' \to R$ も環の同型写像であることを示せ。また、このことを用いて、環の間の $\simeq$（同型）は、同値関係であることを示せ。

3.4 $f : R \to R'$ を環の準同型、K をその核 (kernel) S を R の部分集合とする。このとき、$f^{-1}(f(S)) = S + K$ であることを示せ。

3.5 $f : R \to R'$ を環の準同型とするとき、次を示せ。
(1) I が R のイデアルならば、$f(I)$ は、Imf のイデアル。
(2) I' が R' のイデアルならば、$f^{-1}(I') = \{a \in R | f(a) \in I'\}$ は、Ker$f$ を含む R のイデアルである。

3.6 $f : R \to R'$ を環の全射準同型とする。
$\mathcal{I}$: R のイデアルで、Ker$f$ を含むもの全体。
$\mathcal{I}'$: R' のイデアル全体。
このとき、$\phi : \mathcal{I} \to \mathcal{I}'$ $(I \mapsto f(I))$、$\psi : \mathcal{I}' \to \mathcal{I}$ $(I' \mapsto f^{-1}(I'))$ は、$\mathcal{I}$ と $\mathcal{I}'$ の間の全単射を与えることを示せ。

3.7 K、L を体。$K \subset L$ とし、$\alpha \in L$、 α の最小多項式 $p(x) \in K[x]$ の次数を d とする。このとき、

$$K[\alpha] = \{a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{d-1}\alpha^{d-1} | a_0, \ldots, a_{d-1} \in K\}$$

で、$K[\alpha]$ は、K 上の d 次元ベクトル空間となることを示せ。

3.8 下記の $\boldsymbol{C}$ の元について、$\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式の次数を求めよ。
(1) 0 (2) $2/3$ (3) $\sqrt{2}$ (4) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ (5) $\sqrt[3]{-2}$

3.9 $\boldsymbol{C} \simeq \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ -b & a \end{array} \right) \middle| a, b \in \boldsymbol{R} \right\}$ であることを示せ。

3.10 R を可換環とするとき次の同型を示せ。

$$R[x] \simeq R[x, y]/(y) \simeq R[x, y]/(x - y)$$

4　素イデアルと極大イデアル

4.1 R を整域、1 を R の単位元、$S=\{n\in \boldsymbol{N}|n\cdot 1=\overbrace{1+\cdots+1}^{n\text{ 個}}=0\}$ とする。$S\neq\emptyset$ のとき、$p=\min S$ とおくと、p は、素数であることを示せ。

註: p を R の標数 (characteristic) といい、$p=\mathrm{char}R$ とかく。$S=\emptyset$ のときは、$\mathrm{char}R=0$ とする。

4.2 $R=\boldsymbol{Z}[x]$ (有理整数環上の多項式環) とする。

$$(2)=\{f(x)\cdot 2|f(x)\in \boldsymbol{Z}[x]\}$$

は、素イデアルであるか、極大イデアルか。それぞれ判定せよ。

4.3 $f(x)\in\boldsymbol{Z}[x]$ が、$\boldsymbol{Z}$ 上既約ならば、$\boldsymbol{Q}$ 上既約であることを示せ。

4.4 $\boldsymbol{Q}[\sqrt[3]{2}]$ は、体であることを示せ。

4.5 R を可換環、I、J を R のイデアルで、$I+J\neq R$ を満たすものとする。$f:R\to R/I$ $(x\mapsto x+I)$ とする。このとき次を示せ。

$$f(J):R/I \text{ の素イデアル } \Leftrightarrow I+J:R \text{ の素イデアル}$$

4.6 R を可換環、I をそのイデアルとする。このとき、
$\sqrt{I}=\{a\in R|$ ある自然数 n について $a^n\in I\}$ とする。
(1)　$\sqrt{I}$　は、イデアルである。
(2)　I が素イデアルならば、$I=\sqrt{I}$。

4.7 R を環、$I(\neq R)$ をその左イデアルとする。このとき、I を含む R の極大左イデアルが存在することを示せ。

4.8 $\boldsymbol{Z}[\sqrt{-1}]$ は、PID である。(2.3 参照)　この中で、単項イデアル、(2)、(3)、(5) はそれぞれ極大イデアルかどうか判定せよ。また、極大イデアルでないときは、それを含む極大イデアルをすべて求めよ。

4.9 $(\pi)\neq(0)$ を $\boldsymbol{Z}[\sqrt{-1}]$ の素イデアルとする。このとき、$\boldsymbol{Z}\cap(\pi)=\boldsymbol{Z}\cdot p$ (p は素数) でかつ、$N(\pi)=p$ または、p^2 である。$N(\pi)=p^2$ のときは (p) は素イデアル、$N(\pi)=p$ のときは、(p) は素イデアルではない。

5　環の直和

5.1 R を可換環、$I_1, I_2, \ldots, I_n$ をどの 2 つも互いに素であるイデアルとする。このとき、

$$R/\bigcap_{i=1}^{n} I_n \simeq R/I_1 \oplus \cdots \oplus R/I_n$$

であることを示せ。

5.2 (1)　3 で割ったら 1 余り、10 で割ったら 3 余り、7 で割ったら 0 余り、13 で割ったら 11 余る整数を一つ見つけよ。

(2)　上の条件を満たす整数をすべて見つけよ。

5.3 (1)　(x^2-2) と、(x^3-2) は、$\boldsymbol{Z}[x]$ のイデアルとして互いに素か。

(2)　(x^2-2) と、(x^3-2) は、$\boldsymbol{R}[x]$ のイデアルとして互いに素か。

5.4 $R = R_1 \oplus R_2$ を環の直和とする。このとき次を示せ。

(1)　$U(R) = U(R_1) \times U(R_2)$。

(2)　R_1、R_2 が体であっても、R は体ではない。

5.5 可換環 R のイデアル $I_1, I_2, \ldots, I_n$ のどの 2 つも互いに素であれば、次が成立することを示せ。

$$\bigcap_{i=1}^{n} I_i = I_1 \cdot I_2 \cdots I_n$$

5.6 R を整域、$a \in R$ とするとき、次を示せ。

$$f(x) \in R[x] \text{ が既約 } \Leftrightarrow f(x-a) \in R[x] \text{ が既約}$$

5.7 p を素数とするとき、$x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1 = (x^p-1)/(x-1)$ は、$\boldsymbol{Z}[x]$ の元として既約であることを示せ。

5.8 R を環としたとき、$Z(R) = \{a \in R | xa = ax \text{ for all } x \in R\}$ を R の中心と呼ぶ。

(1) $e \in Z(R)$ が、$e^2 = e \neq 0$ を満たすとき、Re は、R の両側イデアルで、e を単位元とする環となることを示せ。

(2) $e_1, \ldots, e_n \in Z(R)$, $e_i^2 = e_i$, $e_i e_j = 0$ $(i \neq j)$, $1 = e_1 + \cdots + e_n$ ならば、$R \simeq Re_1 \oplus \cdots \oplus Re_n$ であることを示せ。

5.9 R を可換環とすると、$Z(M_n(R)) = \{aI | a \in R\}$ であることを示せ。ここで、I は、単位行列を表すものとする。

6 商環

6.1 商環の二元の和・積が、元の表し方によらずに定まることを示せ。

6.2 p を素数としたとき、$\boldsymbol{Z}_{(p)}$ は、$\boldsymbol{Z}$ の 素イデアル pZ による局所化と同型であることを示せ。

6.3 S は可換環 R の乗法的部分集合とし、I は、$I \cap S = \emptyset$ を満たす R のイデアルのうち極大なものとする。このとき、I は素イデアルであることを示せ。

6.4 S を、可換環 R の乗法的部分集合、$f : R \to R'$ を環準同型とする。$f(S) \subset U(R')$ ならば、環準同型 $g : S^{-1}R \to R'$ で $g \circ \phi_S = f$ を満たすものがただ一つ存在することを示せ。ここで、$\phi_S : R \to S^{-1}R\,(a \mapsto a/1)$ (自然な準同型)。

6.5 $I,\, J$ を可換環 R のイデアルとし、$S^{-1}I$ は、$\{a/s | a \in I,\, s \in S\} \subset S^{-1}R$ を表すものとする。このとき、次を示せ。

(1) $S^{-1}(I + J) = S^{-1}I + S^{-1}J$

(2) $S^{-1}(IJ) = (S^{-1}I)(S^{-1}J)$

(3) $S^{-1}(I \cap J) = S^{-1}I \cap S^{-1}J$

6.6 (1) $\boldsymbol{Z}$ の環としての自己同型（環準同型で全単射) は、恒等写像だけであることを示せ。

(2) $\boldsymbol{Q}$ の環としての自己同型（環準同型で全単射) は、恒等写像だけであることを示せ。

6.7 (1) $R = \boldsymbol{Z}_{12}$ としたとき、R の乗法的部分集合をすべて求めよ。

(2) (1) で求めた乗法的部分集合 S について、$S^{-1}R$ が同型でないものはいくつあるか。

6.8 I を $S^{-1}R$ のイデアルとすると、$I = (\phi_S(R) \cap I)(S^{-1}R)$ であることを示せ。これを用いて、R が PID ならば、$S^{-1}R$ も PID であることを示せ。

6.9 p を素数としたとき、$\boldsymbol{Z}$ の $p\boldsymbol{Z}$ による局所化を $\boldsymbol{Z}_{(p)}$ と書く。その極大イデアルを $\mathcal{P}$ とするとき、次を示せ。

(1) $\mathcal{P} = \{pa/s | a, s \in \boldsymbol{Z},\, p \not| s\}$

(2) $Q(\boldsymbol{Z}_{(p)}) = \boldsymbol{Q}$

(3) $\boldsymbol{Z}_{(p)}/\mathcal{P} \simeq \boldsymbol{Z}_p (\simeq \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})$

6.10 (1) $\boldsymbol{Z}_{(p)}$ のイデアル I に対し、$I \cap \boldsymbol{Z}$ は $\boldsymbol{Z}$ のイデアルで、$i \cap \boldsymbol{Z} = (n)$ とすれば、$I = n\boldsymbol{Z}_{(p)}$ である。特に、$\boldsymbol{Z}_{(p)}$ は、PID であることを示せ。

(2) $\boldsymbol{Z}_{(p)}$ の自明でないイデアルは、$p^e\boldsymbol{Z}_{(p)}\,(1 \geq e)$ の形のもののみであることを示せ。

7 一意分解環

7.1 R を、UFD、$\mathcal{P}$ を、R の素元を、同伴の条件で類別した完全代表系とし、

$$a = up_1^{e_1}\cdots p_r^{e_r},\ b = vp_1^{f_1}\cdots p_r^{f_r},\ u, v \in U(R),\ p_i \in \mathcal{P},\ e_i, f_j \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$$

としたとき、次を示せ。

(1) $a|b \Leftrightarrow e_i \leq f_i\ (1 \leq i \leq r)$。

(2) a と b の最大公約元を $d = p_1^{d_1}\cdots p_r^{d_r}$ とすると、$d_i = \min(e_i, f_i)$、最小公倍数を $l = p_1^{l_1}\cdots p_r^{l_r}$ とすると、$l_i = \max(e_i, f_i)$。

7.2 K, L を体、$K \subset L$ $f(x), g(x) \in K[x]$ とすると、$f(x), g(x)$ の $K[x]$ での最大公約元は、$L[x]$ での最大公約元でもある。特に、$L[x]$ で、$f(x) = g(x)h(x)$ $h(x) \in L[x]$) と分解すれば、$h(x) \in K[x]$。

7.3 R を UFD、S を、積閉集合とする。このとき、以下のことを示せ。

(1) $S^{-1}R$ も UFD である。

(2) $S^{-1}R$ の素元は R の素元 p で、$(p) \cap S = \emptyset$ となるものと同伴である。

7.4 $\boldsymbol{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} | a, b \in \boldsymbol{Z}\}$ はユークリッド整域であることを示せ。

7.5 $\boldsymbol{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} | a, b \in \boldsymbol{Z}\}$ とする。次のそれぞれについて、$\boldsymbol{Z}[\sqrt{d}]$ は、UFD ではないことを示せ。

(1) $d = -6$ (2) $d = -10$ (3) $d = -13$

(4) $d = -14$ (5) $d = -17$

7.6 $\boldsymbol{Z}[\sqrt{10}] = \{a + b\sqrt{10} | a, b \in \boldsymbol{Z}\}$ とする。$\alpha = a + b\sqrt{10} \in \boldsymbol{Z}[\sqrt{10}]$ について、$N(\alpha) = a^2 - 10b^2$ とすると、$N(\alpha) \neq \pm 2, \pm 3$ であることを用いて、$\boldsymbol{Z}[\sqrt{10}]$ は、UFD でないことを示せ。

7.7 $\boldsymbol{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} | a, b \in \boldsymbol{Z}\}$ において、$(1 + 2\sqrt{3})\alpha + (5 + 4\sqrt{3})\beta = 1$ となる、$\alpha, \beta \in \boldsymbol{Z}[\sqrt{3}]$ を求めよ。

7.8 $\boldsymbol{Q}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} | a, b \in \boldsymbol{Q}\}$ の元で、$x^2 + cx + d = 0$ $(c, d \in \boldsymbol{Z})$ の形の方程式の根となるものは、$\boldsymbol{Z}[\sqrt{3}]$ に限ることを示せ。

7.9 $\boldsymbol{Q}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} | a, b \in \boldsymbol{Q}\}$ の元で、$x^2 + cs + d = 0$ $(c, d \in \boldsymbol{Z})$ の形の方程式の根となるものをすべて求めよ。

8 R-加群と R-代数

8.1 M を R-左加群、u を M の元とするとき、$\mathrm{Ann}(u) = \{r \in R | ru = 0\}$ を u の零化イデアルと呼ぶ。このとき以下を示せ。

(1) $\mathrm{Ann}(u)$ は、実際、R の左イデアルである。

(2) N を、u で生成された M の部分加群、Ru とすると、$R/\mathrm{Ann}(u) \simeq N$ である。

8.2 R-左加群、M の R-部分加群の集合 $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対し、M の任意の元 m が、これらの部分加群に属する元の有限和として、$m = m_{\lambda_1} + \cdots + m_{\lambda_r}$ $(m_{\lambda_i} \in M_{\lambda_i})$ と表されるとき、M は、$\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の和であるといって、$M = \sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ と表す。また、M の元が、上の形に、一意的に表されるとき、M は、$\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の直和であるといい、$M = \oplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ とかく。M が、U を基底とする R-自由加群であるための必要十分な条件は、$M = \oplus_{u\in U} Ru$、$R \simeq Ru$ となることであることを示せ。

8.3 任意の R-左加群 M は、ある、R-自由加群の準同型像であることを示せ。

R-左加群 M_i と、R-準同型 $f_i : M_i \to M_{i+1}$ の列、

$$\cdots \to M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \to \cdots$$

において、$\mathrm{Im} f_{i-1} = \mathrm{Ker} f_i$ が、各 i について成立しているとき、これは完全系列であるという。M を、R-左加群とするとき、$0 \to M$ は、零加群からの、零写像、$M \to 0$ は、零加群への、零写像を表すものとし、特に、写像は書かない。

8.4 M、M'、N を、R-左加群とする。

(1) $0 \to N \xrightarrow{f} M$ が、完全系列であることと、f が、単射であることは同値である。

(2) $M \xrightarrow{g} M' \to 0$ が、完全系列であることと、g が、全射であることは同値である。

(3) $0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M' \to 0$ が完全系列であれば、$N \simeq f(N)$ かつ、$M/f(N) \simeq M'$ であることを示せ。

8.5 R-左加群の完全系列、$M \xrightarrow{g} M' \to 0$ に対して、R-準同型、$h : M' \to M$ が存在して、$g \circ h = id_{M'}$ となるとき、この完全系列は分裂するという。このとき、$M = \mathrm{Ker} g \oplus \mathrm{Im} h$ であることを示せ。

8.6 R-左加群 M_1、M_2 と、R-準同型 $f : M_1 \to M_2$ にたいして、i を埋め込み写像、$\mathrm{Coker} f = M_2/\mathrm{Im} f$、$p$ を自然な準同型とすると、次は、完全系列であることを示せ。

$$0 \to \mathrm{Ker} f \xrightarrow{i} M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{p} \mathrm{Coker} f \to 0$$

9　鎖条件と Hilbert の基定理

9.1 M を R-左加群、N をその部分加群とするとき次を示せ。

(1)　M が、ネーター（アルチン）加群としたとき、N、M/N は、ネーター（アルチン）加群であることを示せ。

(2)　U、V を共に、M の部分加群で、$U \subset V$ を満たすものとする。このとき次を示せ。

$$U = V \Leftrightarrow U + N = V + N \text{ and } U \cap N = V \cap N$$

9.2 M を R-左加群、N をその部分加群とするとき次を示せ。

(1)　N と、M/N がネーター（アルチン）加群ならば、M も、ネーター（アルチン）加群である。

(2)　M が、部分加群、$M_1, \ldots, M_n$ の和、$M_1 + \cdots + M_n$ である時、次の二つは同値であることを示せ。

(i)　M は、ネーター（アルチン）加群。

(ii)　各 M_i は、ネーター（アルチン）加群。

9.3 R が、左ネーター（アルチン）環で、M が、R-有限生成ならば、M は、ネーター（アルチン）加群であることを示せ。

9.4 (1)　左ネーター（アルチン）環の剰余環は、また、左ネーター（アルチン）環であることを示せ。

(2)　可換ネーター環 R 上の、可換な代数 A が、代数として有限生成ならば、A は、ネーター環であることを示せ。ここで、代数として有限生成とは、A に、有限個の元 $u_1, \ldots, u_n$ が存在して、A の任意の元は、$u_1, \ldots, u_n$ の、R 係数の多項式として書けることをいう。

9.5 体 K 上の多項式環 $K[x]$ は、アルチン環ではないことを示せ。

9.6 体 K 上の次元が有限である、K 上の代数は、左ネーター環であり、かつ、左アルチン環であることを示せ。

9.7 R を、単項イデアル環とする。

(1)　R は、ネーター環であることを示せ。また、必ずしも、アルチン環ではないことを例証せよ。

(2)　(a) を、a で生成された、R のイデアルとする。このとき、$R/(a)$ は、左ネーター（アルチン）環であることを示せ。