Algebra III Final

Winter AY2002/2003

ID 番号、氏名を、各解答用紙に、また、問題番号も忘れずに書いて下さい。定理などは [参考] にあるもののみを使い、[参考] にない定理を引用するときは、その定理の内容も記述せよ。「参考」にあるものを使う時も、何と何が対応するかを明記すること。

1. R を可換環（加法の単位元 0 とし、乗法の単位元 $1\,(\neq 0)$ を含む）とする。R のイデアルが $\{0\}$ と R のみであれば、R は体であることを証明せよ。

2. $L : K$ を体の拡大とする。
   (a) $\alpha \in L$ が K 上代数的な元であることの定義を書け。
   (b) K の元はすべて K 上代数的であることを証明せよ。
   (c) 複素数体 $\boldsymbol{C}$ の元で有理数体 $\boldsymbol{Q}$ の元ではないが、$\boldsymbol{Q}$ 上代数的である元の例をあげ、それが条件を満たすことを証明せよ。

3. 体の拡大 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7}) : \boldsymbol{Q}$ を考える。$L = \boldsymbol{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7})$ とおく。
   (a) $L : \boldsymbol{Q}$ は単純拡大、すなわち $\alpha \in L$ で $L = \boldsymbol{Q}(\alpha)$ となるものが存在することを証明せよ。
   (b) $L : \boldsymbol{Q}$ の拡大次数 $[L : \boldsymbol{Q}]$ は 4 であることを証明せよ。
   (c) L の元はすべて $\boldsymbol{Q}$ 上代数的であることを証明せよ。
   (d) σ を L の自己同型写像とする。$a \in \boldsymbol{Q}$ ならば常に $\sigma(a) = a$ でありかつ、$\sigma(\sqrt{5}) = \sqrt{5}$ または $\sigma(\sqrt{5}) = -\sqrt{5}$ であることを証明せよ。
   (e) $\boldsymbol{Q}(\sqrt{5})$ の自己同型 τ で、$\tau(\sqrt{5}) = -\sqrt{5}$ となるものが存在することを証明せよ。
   (f) L の自己同型写像 σ で $\sigma(\sqrt{5}) = -\sqrt{5}$ となるものが存在することを証明せよ。
   (g) $L : \boldsymbol{Q}$ は正規拡大であることを証明せよ。

4. $K = \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ を 2 個の元からなる体とする。
   (a) K 係数の多項式が既約であることの定義を書き、その定義のもとで既約な 3 次多項式を一つ求めよ。その多項式が既約であることも示せ。
   (b) K の拡大体 L で 8 個の元からなるものが存在することを証明せよ。
   (c) L を K の拡大体で 8 個の元からなるものとする。このとき、常に $x + x = 0$ がすべての $x \in L$ に対して成立することを証明せよ。

[参考]

命題 1.1 $L:K$ を体の拡大とし、α を K 上代数的な L の元、$m(x)\in K[x]$ を α の最小多項式とする。このとき、次が成立する。

(1) $m(x)$ は、既約。

(2) $f(x)\in K[x]$ が、$f(\alpha)=0$ を満たせば、$m(x)$ は、$f(x)$ を割り切る。特に、最小多項式はただ一つであり、さらに、$f(x)\in K[x]$ が、既約な *monic* な多項式で、$f(\alpha)=0$ ならば、$f(x)=m(x)$ すなわち、$f(x)$ は、最小多項式である。

(3) $K(\alpha)\simeq K[x]/(m(x))$。

(4) $K(\alpha)=K[\alpha]=\{a_0+a_1\alpha+\cdots+a_{d-1}\alpha^{d-1}\mid a_i\in K\}$ であり、$1,\alpha,\ldots,\alpha^{d-1}$ は、K 上 一次独立である。ただし、$\deg m(x)=d$ とする。

命題 1.2 K を体、$m(x)$ を K 上既約な *monic* な多項式とする。このとき、拡大 $K(\alpha):K$ で、α の最小多項式が $m(x)$ となるものがある。

$i:R_1\longrightarrow R_2$ を環準同型とする。このとき、R_1、R_2 を係数とする多項式環の間の写像 $\hat{i}:R_1[x]\longrightarrow R_2[x]$ を次のように定義する。

$$a_0+a_1x+\cdots+a_sx^s\mapsto i(a_0)+i(a_1)x+\cdots+i(a_s)x^s.$$

すると、$\hat{i}$ は、環準同型写像である。さらに、i が同型写像なら、$\hat{i}$ も同型写像である。

定理 1.3 $i:K\to L$ を体同型、$K(\alpha):K$、$L(\beta):L$ を体の拡大とし、α を K 上代数的、β を L 上代数的とする。$m(x)$ が K 上 α の最小多項式とする。もし、$\hat{i}(m(x))$ が L 上 β の最小多項式ならば、体同型 $j:K(\alpha)\longrightarrow L(\beta)$ で、$j_{|K}=i$、$j(\alpha)=\beta$ となるものが存在する。

体の拡大 $L:K$ において、L の K 上の次元 $\dim_K L$ を体の拡大 $L:K$ の次数と呼び、$[L:K]$ と書く。

定理 2.1 $M:L$、$L:K$ を体の拡大とする。このとき、次が成立する。

$$[M:K]=[M:L][L:K].$$

定義 4.1 体の拡大 $L:K$ が正規であるとは、L において、少なくとも一つの根を持つ K 上の既約多項式 f は、全て、L において（一次因数に）分解している時を言う。

Algebra III を受講した感想、コメント、なんでも構いませんから書いて下さい。（これによって、成績に不利益を及ぼすことはありませんが、同時に、利益を受けることもありません。）

Report および 演習 を 50 点満点、Final を 150 点満点、合計 200 点満点で計算して、成績を出す予定です。

鈴木寛@国際基督教大学数学教室