BCM I : Final 2011

June 22, 2011

ID#: Name:

1. Let P, Q, R be statements. Complete the following truth table. (5 pts)

P	Q	R	$P \Rightarrow (Q \vee R)$	$(P \wedge \sim Q) \Rightarrow R$
T	T	T		
T	T	F		
T	F	T		
T	F	F		
F	T	T		
F	T	F		
F	F	T		
F	F	F		

2. Prove or disprove the following statement. (5 pts)

$$\forall x \in \boldsymbol{R}, \exists y \in \boldsymbol{R}, xy + x + y = 0.$$

3. Let $x \in \boldsymbol{Z}$. Use a lemma to prove that if $7x + 4$ is even, then $3x - 11$ is odd. (10 pts)

Lemma.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	Total

ID#: Name:

4. Let n be a positive integer. For $a, b \in \boldsymbol{Z}$, we write $a \equiv b \pmod{n}$, whenever there is an integer c such that $b - a = cn$. In the following you may use the fact that if $\gcd(a, b) = 1$, then there exist $x, y \in \boldsymbol{Z}$ such that $ax + by = 1$.

   (a) For $a, b, c, d \in \boldsymbol{Z}$, show the following. (10 pts)

   $$\text{If } a \equiv b \pmod{n} \text{ and } c \equiv d \pmod{n}, \text{ then } ac \equiv bd \pmod{n}.$$

   (b) Let $a, b, c \in \boldsymbol{Z}$. Suppose $\gcd(a, n) = 1$. Show the following. (5 pts)

   $$\text{If } ab \equiv ac \pmod{n}, \text{ then } b \equiv c \pmod{n}.$$

   (c) Give a counter example of the previous problem when $d = \gcd(a, n) > 1$. (Do not fix n.) (5 pts)

ID#: Name:

5. Let $f : A \to B$, $g : B \to C$ and $h = g \circ f : A \to C$ $(x \mapsto g(f(x)))$ be functions. Show the following.

   (a) If both f and g are one-to-one, then so is h. (5 pts)

   (b) If h is onto, then so is g. (5 pts)

   (c) If h is bijective, then f is one-to-one and g is onto. (5 pts)

   (d) Show that the converse of the previous problem does not hold by giving a counter example. (5 pts)

ID#: Name:

6. For $a, b \in \boldsymbol{R}$ with $a < b$, let $(a, b) = \{x \in \boldsymbol{R} : a < x < b\}$, and $[a, b] = \{x \in \boldsymbol{R} : a \leq x \leq b\}$.

   (a) State the definition of $|A| = |B|$ for sets A, B, and show that $|[0, 1]| = |[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]|$. (10 pts)

   (b) State the definition of $|A| \leq |B|$ for sets A, B, and show that $|(0, 1)| \leq |[0, 1]|$. (10 pts)

   (c) Show $|(0, 1)| = |[0, 1]|$. (5 pts)

ID#: Name:

7. Find a positive integer m such that for each integer $n \geq m$, there are nonnegative integer x and y such that $n = 5x + 8y$. Use the Strong Principle of Mathematical Induction to prove this. (10 pts)

8. Find the smallest m satisfying the previous problem. (5 pts)

Please write your comments:

(1) About this course, especially suggestions for improvements.

(2) Topics in Mathematics or in other subjects you want to pursuit.

BCM I: Solutions to Final 2011

June 22, 2011

1. Let P, Q, R be statements. Complete the following truth table. (5 pts)

P	Q	R	$P \Rightarrow (Q \vee R)$	$(P \wedge \sim Q) \Rightarrow R$
T	T	T	$\boldsymbol{T}$ T	F F $\boldsymbol{T}$
T	T	F	$\boldsymbol{T}$ T	F F $\boldsymbol{T}$
T	F	T	$\boldsymbol{T}$ T	T T $\boldsymbol{T}$
T	F	F	$\boldsymbol{F}$ F	T T $\boldsymbol{F}$
F	T	T	$\boldsymbol{T}$ T	F F $\boldsymbol{T}$
F	T	F	$\boldsymbol{T}$ T	F F $\boldsymbol{T}$
F	F	T	$\boldsymbol{T}$ T	F T $\boldsymbol{T}$
F	F	F	$\boldsymbol{T}$ F	F T $\boldsymbol{T}$

These are logically equivalent.

2. Prove or disprove the following statement. (5 pts)

$$\forall x \in \boldsymbol{R}, \exists y \in \boldsymbol{R}, xy + x + y = 0.$$

解. Not true. The negation "$\exists x \in \boldsymbol{R}, \forall y \in \boldsymbol{R}, xy + x + y \neq 0$." is true. Set $x = -1$, then $xy + x + y$ becomes $x = -1$, which cannot be zero. ■

3. Let $x \in \boldsymbol{Z}$. Use a lemma to prove that if $7x + 4$ is even, then $3x - 11$ is odd. (10 pts)

Lemma. If $7x + 4$ is even for $x \in \boldsymbol{Z}$, then x is even.

Proof of Lemma. We prove the contrapositive. Suppose x is odd and let $x = 2m + 1$ for some $m \in \boldsymbol{Z}$. Then

$$7x + 4 = 7(2m + 1) + 4 = 2(7m + 5) + 1.$$

Since $7m + 5 \in \boldsymbol{Z}$, $7x + 4$ is odd. Thus the lemma is proved. ■

By Lemma if $7x + 4$ is even for $x \in \boldsymbol{Z}$, then x is even. So let $x = 2n$ for some $n \in \boldsymbol{Z}$. Then

$$3x - 11 = 3(2n) - 11 = 2(3n - 6) + 1.$$

Since $3n - 6 \in \boldsymbol{Z}$, $3x - 11$ is odd. ■

4. Let n be a positive integer. For $a, b \in \boldsymbol{Z}$, we write $a \equiv b \pmod{n}$, whenever there is an integer c such that $b - a = cn$. In the following you may use the fact that if $\gcd(a, b) = 1$, then there exist $x, y \in \boldsymbol{Z}$ such that $ax + by = 1$.

   (a) For $a, b, c, d \in \boldsymbol{Z}$, show the following. (10 pts)

$$\text{If } a \equiv b \pmod{n} \text{ and } c \equiv d \pmod{n}, \text{ then } ac \equiv bd \pmod{n}.$$

解. By assumption, $b - a = sn$ and $d - c = tn$ for some $s, t \in \boldsymbol{Z}$. Hence

$$bd - ac = bd - ad + ad - ac = (b - a)d + a(d - c) = snd + atn = n(sd + at).$$

Since $sd + at \in \boldsymbol{Z}$, $n \mid bd - ac$ and $ac \equiv bd \pmod{n}$. ■

(b) Let $a, b, c \in \boldsymbol{Z}$. Suppose $\gcd(a, n) = 1$. Show the following. (5 pts)

$$\text{If } ab \equiv ac \pmod{n}, \text{ then } b \equiv c \pmod{n}.$$

解. Since $\gcd(a, n) = 1$, there exist $s, t \in \boldsymbol{Z}$ such that $as + nt = 1$. Since $n \mid 1 - as$, $as \equiv 1 \pmod{n}$. Thus by (a), $asb \equiv b \pmod{n}$, and $asc \equiv c \pmod{n}$. By assumption $ab \equiv ac \pmod{n}$. Hence by (a), $abs \equiv acs \pmod{n}$. Thus

$$b \equiv asb \equiv asc \equiv c \pmod{n}.$$

Therefore $b \equiv c \pmod{n}$. ■

(c) Give a counter example of the previous problem when $d = \gcd(a, n) > 1$. (Do not fix n.) (5 pts)

解. Let $a = ds$ and $n = dt$ for some $s, t \in \boldsymbol{Z}$. Let $b = t$ and $c = 0$. Since $0 < |t| < n$, $t \not\equiv 0 \pmod{n}$, while

$$at \equiv dst \equiv sn \equiv 0 \equiv a0.$$

This gives a counter example. ■

5. Let $f : A \to B$, $g : B \to C$ and $h = g \circ f : A \to C$ $(x \mapsto g(f(x)))$ be functions. Show the following.

(a) If both f and g are one-to-one, then so is h. (5 pts)

解. For $a, a' \in A$, suppose $h(a) = h(a')$. Then $g(f(a)) = h(a) = h(a') = g(f(a))$. Since g is one-to-one, $f(a) = f(a')$. Moreover, since f is one-to-one, $a = a'$. Thus h is one-to-one as $h(a) = h(a')$ implies $a = a'$. ■

(b) If h is onto, then so is g. (5 pts)

解. Let $c \in C$. Since h is onto, there exists $a \in A$ such that $h(a) = c$. Let $b = f(a) \in B$. Then $g(b) = g(f(a)) = h(a) = c$. Therefore g is onto as for $c \in C$ there exists $b \in B$ such that $g(b) = c$. ■

(c) If h is bijective, then f is one-to-one and g is onto. (5 pts)

解. Suppose h is bijective. Then h is onto and so g is onto by (b). It remains to show that f is one-to-one. For $a, a' \in A$ assume that $f(a) = f(a')$. Then

$$h(a) = g(f(a)) = g(f(a')) = h(a').$$

Since h is bijective, $a = a'$. Therefor f is one-to-one as $f(a) = f(a')$ implies $a = a'$. ■

(d) Show that the converse of the previous problem does not hold by giving a counter example. (5 pts)

解. It suffices to give an example that f is one-to-one, g is onto, and $h = g \circ f$ is bijective. Let $A = \{1\}$, $B = C = \{a, b\}$, $f(1) = a$ and $g = i_B$, the identity function. Then $h = g \circ f : A \to C$ and $h(1) = a$. Clearly h is not onto as there is not element x in A suth that $h(x) = b$. ■

6. For $a, b \in \boldsymbol{R}$ with $a < b$, let $(a, b) = \{x \in \boldsymbol{R} : a < x < b\}$, and $[a, b] = \{x \in \boldsymbol{R} : a \leq x \leq b\}$.

   (a) State the definition of $|A| = |B|$ for sets A, B, and show that $|[0, 1]| = |[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]|$. (10 pts)

   解. Definition. For sets A, B, $|A| = |B|$ whenever $A = B = \emptyset$ or there is a bijection from A to B.

   Let $f : [0, 1] \to [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ $(x \mapsto \frac{1}{3}(x + 1))$. Since $f'(x) = \frac{1}{3} > 0$, f is continuous and increasing. Thus f is one-to-one. Since $f(0) = \frac{1}{3}$ and $f(1) = \frac{2}{3}$, f is onto by Intermediate Value Theorem. Thus $|[0, 1]| = |[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]|$. ■

   (b) State the definition of $|A| \leq |B|$ for sets A, B, and show that $|(0, 1)| \leq |[0, 1]|$. (10 pts)

   Definition. For sets A, B, $|A| \leq |B|$ if $A = \emptyset$ or there is a one-to-one function from A to B.

   Let $g : (0, 1) \to [0, 1]$ $(x \mapsto x)$. Then g is clearly one-to-one. Thus $|(0, 1)| \leq |[0, 1]|$. ■

   (c) Show $|(0, 1)| = |[0, 1]|$. (5 pts)

   解. Let $h : [0, 1] \to (0, 1)$ $(x \mapsto \frac{1}{3}(x + 1))$. Then by (a), h is one-to-one. Therefore $|[0, 1]| \leq |0, 1|$. By (b), $|(0, 1)| \leq |[0, 1]|$. Therefor by Schröder-Bernstein's Theorem, $|(0, 1)| = |[0, 1]|$. ■

7. Find a positive integer m such that for each integer $n \geq m$, there are nonnegative integer x and y such that $n = 5x + 8y$. Use the Strong Principle of Mathematical Induction to prove this. (10 pts)

   解. Let $m = 28$. Then $28 = 5 \cdot 4 + 8 \cdot 1$, $29 = 5 \cdot 1 + 8 \cdot 3$, $30 = 5 \cdot 6 + 8 \cdot 0$, $31 = 5 \cdot 3 + 8 \cdot 2$, and $32 = 5 \cdot 0 + 8 \cdot 4$. Let $n \geq 33$. Then $n - 5 \geq 28$. Therefore by induction hypothesis there exist non-negative integers x and y such that $n - 5 = 5x + 8y$. Therefore $n = 5(x + 1) + 8y$, and the assertion holds. ■

8. Find the smallest m satisfying the previous problem. (5 pts)

   解. It suffices to show that there are no non-negative integer $x, y \in \boldsymbol{Z}$ such that $27 = 5x + 8y$. Suppose there are such non-negative integers. Then $0 \leq y \leq 3$. For each value of y, $5x = 27 - 8y$ is not a multiple of 5. A contradiction. ■

数学通論 I を受講したみなさんへ

Grading Policy

最初に配布したシラバスにあるように、演習 (Recitation) (30%) （11 回分割り当てました)、宿題 (Homework) (20%) （8 回、80 問提出を求めました)、期末試験 (Final) (50%) （6 月 22 日に実施)。

教員によって考え方はことなりますが、私は、授業科目というより、コースという考え方が、学士課程教育では大切だと思っています。このコースで 10 週間かけてどれだけ学んだかが重要です。学んだ内容も、学び全体の中でそれをどのように位置づけるかも、ひとそれぞれでしょう。そこで、今までの課題を丁寧に提出し、演習の問題の大部分を黒板で発表してきた人は単位を落とすことはありません。ただし、この評価の仕方では、期末試験の割合を高くしてあります。数学において、学んだ数学を試験で表現できることは大切だと考えているからです。

Final および提出物は週明けには返却できると思います。返却できるようになった時点で Moodle に書きます。9 月の履修登録日をすぎたら研究室前の椅子の上に置いておきます。

専門の数学の最初のコースはどうでしたか。楽しめましたか。お疲れ様。

After BCM I

まずは、夏の数学セミナーへ参加して下さると嬉しいですね。(8/24-8/27 ICU 軽井沢キャンパス)。今年の教科書はアンドレ ヴェイユ 「初学者のための整数論」です。アンドレ ヴェイユは 20 世紀を代表する大数学者で、女性哲学者のシモーヌ ヴェイユのお兄さんです。ブルバキという数学集団のリーダーの一人でもあります。また、教科書の第 12 章を読むことを勧めます。微分積分学を復習することにもなりますし、数学通論 II への橋渡しにもなります。数学通論に関連して、ちょっと堅めに夏やすみのお薦めを書きます。

1. 数学通論 III の参考書となっている「集合と位相」内田伏一著、裳華房 の前半が集合論です。
2. 数学通論 II に関係する、高木貞治「解析概論」を最初からじっくり読むのがお薦め。
3. 線型代数特論（旧・線形代数学 III）を履修する人も多いと思います。佐武一郎著「線型代数入門」を最初からじっくり読むのもお薦め。
4. もう少し簡単に取り組めそうなのは、「集合への 30 講」志賀浩二著　朝倉書店。
5. 公理的集合論入門をかじってみたい人には、「新装版：集合とはなにか (はじめて学ぶ人のために)」竹内外史著、講談社。

私は、一年生の夏休みは岩村聯著「束論」を読み通しました。これが数学の本で初めて読み通したものでした。

二年生の夏は記憶が定かではありませんが松坂和夫著「集合と位相」を読んだと思います。全部は読まなかったかも知れません。個人的には、上の 1 にかわるものとしておすすめです。しかし恐らく絶版。

三年生の夏には「集合論入門」赤摂也著、培風館（ISBN4-563-00301-8, 1957.1.25）を短期間に読み通しました。集合と位相関係の本が並びましたが、無論、他にも読みました。Serge Lang の Algebra は一年生の秋から、3 人で自主ゼミをして読み、4 年まで続けました。完全には終わりませんでした。ポントリャーギンの「連続群論」上下も 3 人での自主ゼミをながいことしましたが、上巻しかゼミでは終わりませんでした。ポントリャーギンの「常微分方程式」はかなり進みましたが、読み終わったかどうかはあまりよく覚えていません。コルモゴロフ・フォミーンの「関数解析の基礎」は読み始めましたが、問題が難しく、あまり進みませんでした。

夏休みにじっくり一冊、数学の本を読むことに時間をかけることができれば、たとえ、読む量は少なくても、大きな価値があると思いますよ。数学で学んだことは何年かたって、誤りだったということも、時代遅れになることもありません。また、苦労して読む経験はすべて脳のトレーニングになっているハズです。数学を楽しみましょう。

鈴木寛 (*hsuzuki@icu.ac.jp*)