March 4, 1999

Calculus II Final

Winter Term, AY1998-9

ID 番号、氏名を、各解答用紙に、また、問題番号も忘れずに書いて下さい。(Write your ID number and your name on each of your solution sheet. Do not forget to write the problem number as well.)

1. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9axy$, $a \neq 0$ とする。
   (a) 点 $P(1,2,f(1,2))$ における接平面の方程式を求めよ。(Find the equation of the tangent plane at the point $P(1,2,f(1,2))$.)
   (b) 停留点をすべて求めよ。(Find all stationary points.)
   (c) 停留点が極点かどうかを判定し、極点の場合には、極値を求めよ。(Determine extremum and find the values at each relative maximum and relative minimum point.)

2. (a) 次の積分の順序を変更せよ。(Change the order of the integrals of the following.)
$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 \mathrm{e}^{y\sqrt{y}} dy \right) dx.$$
   (b) 上の積分の値を計算せよ。積分の順序は、どちらを使っても良い。(Evaluate the integral above. You may choose any order in iterated integrals.)

3. (a) $z = f(x,y)$, $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ としたとき、次の式を r,θ での偏導関数および、r,θ の関数で表せ。(Let $z = f(x,y)$, with $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$. Express the following in terms of the partial derivatives with respect to r,θ with r,θ.)
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2.$$
   (b) 曲面が方程式 $z = f(x,y)$ で与えられる時、ある領域 D 上での曲面の面積は下の式で与えられる。(The area of the surface defined by an equation $z = f(x,y)$ is given by the following.)
$$\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy$$
   $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ の変数変換を行い $F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ としたとき、曲面積を与える式を求めよ。(Express the formula for polar coodinates given by $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$.)

(c) 曲面 $z = xy$ の $x^2 + y^2 \leq 1$ の部分の図形の曲面積を求めよ。(Find the area of the surface defined by $z = xy$ on the region $x^2 + y^2 \leq 1$.)

4. 次のべき級数の収束半径 r を求めよ。(Determine the radius of convergence of the following power series.)

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n^2}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n}\right) x^n$.

5. 次の積分の値を求めよ。(Evaluate the following integrals.)

(a) $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x + y \leq \pi,\ 0 \leq x - y \leq \pi\}$ としたとき、

$$\iint_D \mathrm{e}^{x+y} \sin(x - y)\, dx dy.$$

(b) $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x \leq 1\}$ としたとき、

$$\iint_D \mathrm{e}^{x-y}\, dx dy.$$

6. 楕円体 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1$ の体積を求めよ。(Find the volume of the ellipsoid given above.)

鈴木寛@理学科数学教室 Hiroshi Suzuki@Department of Mathematics