Final Exam

(10:40 a.m. — 0:40 p.m. Thurs. Nov. 21, 2002)

ID 番号、氏名を、各解答用紙に、また、問題番号も忘れずに書いて下さい。(Write both of your ID number and name on each of the answer sheets. Do not forget to write the problem number as well.)

1. A, B, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{y}$ を下のようにする。方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ について、次のうち正しいものには ◯、誤っているものには × を解答用紙に記入せよ。(Consider equations $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ and $B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, where A, B, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}$, and $\boldsymbol{y}$ are as given below. True or false? Write ◯ for true and × for false in your answer sheet.) (4pts × 5 = 20pts)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ y_{n+1} \end{bmatrix}.$$

   (a) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解がただ一つならば、$m = n$ である。(If $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ has exactly one solution, then $m = n$.)

   (b) $m > n+1$ ならば $B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ は自明な解 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ しか持たない。(If $m > n+1$, then the only solution to $B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ is $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$.)

   (c) $m < n+1$ ならば $B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ は自明でない解（すべての成分が零でない解）を持つ。(If $m < n+1$, then $B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ has a non trivial solution, i.e., a solution such that at least one entry of $\boldsymbol{y}$ is not zero.)

   (d) $B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ が自明でない解をもてば $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ も解を持つ。(If $B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ has a non trivial solution, then $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ has at least one solution.)

   (e) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解をもてば $B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ は自明でない解を持つ。(If $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ has at least one solution, then $B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ has a non trivial solution.)

2. C を 拡大係数行列 とする連立一次方程式について、以下の問いに答えよ。(Consider a system of linear equations whose augmented matrix is C.) (10pts×4=40pts)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

   また、サイズ 4 の基本行列を以下のようにする。(Let $P(i;c)$, $P(i,j)$, and $P(i,j;c)$ be elementary matrices of size 4 defined below.)

$$P(i;c) = I + (c-1)E_{i,i}, \ P(i,j) = I - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}, \ P(i,j;c) = I + cE_{i,j}.$$

   (a) C に行の基本変形を施し、既約ガウス行列 G を得た。G を得るための基本変形のステップを順番に記せ。(We obtained the reduced echelon form G after we applied a sequence of elementary row operations to the matrix C. Describe each step of a sequence of elementary row operations.)

   (b) 解をすべて求めよ。(Find all solutions of the system of linear equations.)

   (c) 4 次の可逆行列 P で $G = PC$ となるものを基本行列の積で表せ。(Find an invertible matrix P of size 4 such that $G = PC$ and express P as a product of elementary matrices.)

   (d) 前問をみたす P はただひとつしかないことを証明せよ。(Show that there is only one P satisfying the previous problem.)

3. 次の行列に関して以下の問いに答えよ。ただし $x, y, z, 1$ は相異なる実数である。(Let $x, y, z, 1$ be distinct real numbers, and let U be a matrix defined below.) (40pts)

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \end{bmatrix}.$$

(a) $\det(U) = d(x, y, z) = (x-1)(y-1)(z-1)(y-x)(z-x)(z-y)$ であることを示せ。(Show that $\det(U) = d(x, y, z) = (x-1)(y-1)(z-1)(y-x)(z-x)(z-y)$.) (10pts)

(b) $\det(U)$ を第 4 行について展開せよ。展開をして現れる行列式の値は求めなくて良い。(Find the cofactor expansion of $\det(U)$ along the fourth row. Don't evaluate the determinants appeared in the expansion.) (5pts)

(c) $x = 2,\ y = 3,\ z = 4$ とするとき $\det((-U)U^t)$ の値を求めよ。(Find the value of $\det((-U)U^t)$ when $x = 2,\ y = 3,\ z = 4$.) (5pts)

(d) $x = 2,\ y = 3,\ z = 4$ とするとき U^{-1} の $(4, 1)$ 成分を求めよ。答えに行列式が現れても良い。(Let $x = 2,\ y = 3,\ z = 4$. Find $(4, 1)$ entry of U^{-1}. Your solution may involve determinants.) (10pts)

(e) $g(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ を多項式で、$g(1) = 1,\ g(2) = 6,\ g(3) = 4,\ g(4) = 3$ を満たすものとする。Cramer's Rule を用いて、a_3 を行列式を用いて表せ。(Suppose $g(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ be a polynomial of degree at most 3 such that $g(1) = 1,\ g(2) = 6,\ g(3) = 4,\ g(4) = 3$. Apply Cramer's Rule to express a_3 using determinants.) (10pts)

4. 次の行列式の値を求めよ。(Find the determinants of the following matrices.) (10pts $\times$ 2 = 20pts)

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

5. 次の連立一次方程式を考えるため、その係数行列を H とする。(Let H be the coefficient matrix of the system of linear equations given below.) (10pts$\times$ 3 = 30pts)

$$\begin{cases} x + y + \lambda z = a \\ \lambda x + y + z = b \\ x + \lambda y + z = c \end{cases}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) λ のそれぞれの値に関して、H の階数を求めよ。(Determine the rank of H for each value of λ.)

(b) λ のそれぞれの値に関して、上の連立一次方程式が解を持つための a, b, c の満たすべき条件を求めよ。(Find the condition for a, b, c to satisfy when the system of linear equations above has at least one set of solution.)

(c) H が可逆であるときの λ の満たすべき条件とその時の H^{-1} を求めよ。(Find the condition of λ to satisfy when H is invertible. Find H^{-1} for such λ.)

メッセージ： なんでもどうぞ。解答用紙のあいたところに書いて下さい。

Linear Algebra I

Solutions to Final Exam 2002

(Nov. 23, 2002)

1. (a) × (b) × (c) ◯ (d) × (e) ◯

これが「正しければ証明し、誤っていれば反例（成り立たない例）をあげよ」という問題なら、大学院の入試問題にもなります。以下に解説を書きます。

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ とすると $m = 2 > 1 = n$ だが 解は $x = 1$ のみ。

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ とすると $m = 3 > n+1 = 2$ だが $y_1 = t$、$y_2 = -t$ ($t \neq 0$ 例えば $y_1 = 1, y_2 = -1$) は自明でない解である。

(c) 定理 2.2 より正しい。

(d) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ とすると $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解を持たないが、$B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ は自明でない解をもつ。実は、$B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ が、$y_{n+1} \neq 0$ となる解（必然的に自明でない解）を持つことと $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つこととが同値です。皆さんが解いていた演習問題に関連する問題がありましたね。

(e) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ とすると $\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ -1 \end{bmatrix} = [A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{0}]$ となり $B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ の自明でない解が存在します。

2. 3 行 $+(-2)\times$[2 行] $\to$ [3 行][4 行] 入れ換え $\to$ [2 行]$+3\times$[3 行] $\to$ $\frac{1}{2}\times$[4 行]

(a) $$\begin{bmatrix} -6s-3t+7 \\ -2s+2t \\ s \\ t-1 \\ -t-2 \\ t \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$ ここで s, t はパラメタ。

(b) $P = P(4; \frac{1}{2})P(2,3;3)P(2,3)P(3,2;-2)$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

基本行列は可逆だからその積も可逆。これらは、(a) の一つ一つのステップに対応している基本行列でした。積の順序を間違えないように。

(c) G の 1, 2, 4, 5 列で行列を作ると単位行列 I になる。C の 1, 2, 4, 5 列で作った行列を E とすると、$PE = I$。ここで、P は可逆行列だから E も可逆行列で $P = E^{-1}$ となる。したがって P は一通りに定まる。（実は、一般に C を基本変形して既約ガウス行列 G が得られた時、G は一通りに決まりますが（証明はちょっと難しいですが、皆さんにもできると思います。挑戦してみて下さい。）$G = PC$ となる P は一通りではありません。一通りであることと、C の階数が行の数と等しいこととが同値です。これが等しいと先頭の 1 のある列をとると単位行列ができ、上と同じ証明が使えます。等しくない時、違う例を作れますか。）

3. (a) ファンデルモンドの行列式を求める。

$$\begin{aligned}
|U| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & x^2-1 & x^3-1 \\ 0 & y-1 & y^2-1 & y^3-1 \\ 0 & z-1 & z^2-1 & z^3-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & x^2-1 & x^3-1 \\ y-1 & y^2-1 & y^3-1 \\ z-1 & z^2-1 & z^3-1 \end{vmatrix} \\
&= (x-1)(y-1)(z-1) \begin{vmatrix} 1 & x+1 & x^2+x+1 \\ 1 & y+1 & y^2+y+1 \\ 1 & z+1 & z^2+z+1 \end{vmatrix} \\
&= (x-1)(y-1)(z-1) \begin{vmatrix} 1 & x+1 & x^2+x+1 \\ 0 & y-x & y^2+y-x^2-x \\ 0 & z-x & z^2+z-x^2-x \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x-1)(y-1)(z-1)\begin{vmatrix} y-x & y^2+y-x^2-x \\ z-x & z^2+z-x^2-x \end{vmatrix} \\
&= (x-1)(y-1)(z-1)(y-x)(z-x)\begin{vmatrix} 1 & y+x+1 \\ 1 & z+x+1 \end{vmatrix} \\
&= (x-1)(y-1)(z-1)(y-x)(z-x)\begin{vmatrix} 1 & y+x+1 \\ 0 & z-y \end{vmatrix} \\
&= (x-1)(y-1)(z-1)(y-x)(z-x)(z-y) \;=\; d(x,y,z).
\end{aligned}$$

(b) $-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \end{vmatrix} + z\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \end{vmatrix} - z^2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^3 \\ 1 & y & y^3 \end{vmatrix} + z^3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \end{vmatrix}$

(c) $x=2, y=3, z=4$ とすると $\det(U) = d(2,3,4) = (2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3) = 12$。$U$ の転置 U^t の行列式が $\det(U)$ であることに注意して

$$\det((-U)U^t) = \det(-U)\det(U^t) = (-1)^4 \det U \det U = 12^2 = 144.$$

(d) $\det(U) = 12$ を用いると、

$$(U^{-1})_{4,1} = \frac{1}{|U|}(-1)^{4+1}|M_{1,4}| = -\frac{1}{12}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} = -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6}.$$

(e) a_3 は 4 番目の未知数であることに注意して Cramer の公式を用いると

$$a_3 = \frac{1}{|U|}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 9 & 6 \\ 1 & 4 & 16 & 3 \end{vmatrix} \quad \left(= \frac{16}{12} = \frac{4}{3}\right).$$

4. (a) 5　(b) 7　分数が出てきますが、第 1 列から順に消す方法と、左上を消し列に関する展開を使う方法などがあります。サイズが 1 から 2、3 と一つずつ丁寧に求めると、予想がつきます。

5. 拡大係数行列を既約ガウス行列に変形すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & a \\ \lambda & 1 & 1 & b \\ 1 & \lambda & 1 & c \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & a \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & b-\lambda a \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & c-a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & a \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & b-\lambda a \\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & c+b-a-\lambda a \end{bmatrix}.$$

(a) $2-\lambda-\lambda^2 = -(\lambda-1)(\lambda+2)$ に注意すると、$\lambda \neq 1, \lambda \neq -2$ のときは、$\mathrm{rank}H = 3$、$\lambda = -2$ の時は $\mathrm{rank}H = 2$、$\lambda = 1$ のときは $\mathrm{rank}H = 1$。

(b) $\lambda \neq 1, \lambda \neq -2$ のときは、a, b, c に制限なし。$\lambda = -2$ のときは $\mathrm{rank}H = 2$ だから $0 = c+b-a-\lambda a = a+b+c$ でなければならない。逆にこの条件を満たせば拡大係数行列の階数も $2 = \mathrm{rank}H$。$\lambda = 1$ のときは $\mathrm{rank}H = 1$ だから、$0 = b-\lambda a = b-a$ かつ $0 = c+b-a-\lambda a = c+b-2a$ これより $a = b = c$。逆にこれを満たせば拡大係数行列の階数は $1 = \mathrm{rank}H$ となり解をもつ。

(c) 上の変形から（行列式の値を変える変形をしていないので）$\det H = (1-\lambda)(2-\lambda-\lambda^2) = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$ だから可逆なのは $\lambda \neq -2$、$\lambda \neq 1$。これより

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{bmatrix}^{-1}
&= \frac{1}{|H|}\begin{bmatrix} |M_{1,1}| & -|M_{2,1}| & |M_{3,1}| \\ -|M_{1,2}| & |M_{2,2}| & -|M_{3,2}| \\ |M_{1,3}| & -|M_{2,3}| & |M_{3,3}| \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{|H|}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(\lambda+2)(\lambda-1)^2}\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1+\lambda^2 & 1-\lambda \\ -\lambda+1 & 1-\lambda & -1+\lambda^2 \\ \lambda^2-1 & -\lambda+1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(\lambda+2)(\lambda-1)}\begin{bmatrix} -1 & \lambda+1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda+1 \\ \lambda+1 & -1 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$