数学の世界 (World of Mathematics) *February 29, 2012*

Final Exam AY2011

ID#: Name:

以下の問題において授業で扱った Theorem, Proposition を用いる時は、Handout にある番号または、その内容を明記すること。Whenever you apply theorems and propositions in handouts, quote the statements or their numbers.

1. p, q, r を命題とする。(Let p, q, r be propositions.) (10pts)

   (a) 次の式の真理値が常に真になるかどうかを、下の真理表を完成することによって判定せよ。理由も記せ。(Check whether the truth value of the following formula is always T by completing the truth table below.)

$$(p \wedge (\neg q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow r).$$

p	q	r	$p \quad \wedge \quad (\neg q \quad \Rightarrow \quad r)$	$(p \quad \Rightarrow \quad \neg q) \quad \Rightarrow \quad r$	x
T	T	T			F
T	T	F			F
T	F	T			F
T	F	F			T
F	T	T			F
F	T	F			T
F	F	T			F
F	F	F			T

   [**判定と理由 (Decision and Reason)**]

   (b) 空欄に適当に $\neg$ を入れて、次の式が正しいようにせよ。ただし x は上の真理表のような真理値を持つ命題とする。(Fill the underlined blanks with $\neg$ in appropriate places so that the following is valid. Here x is a proposition having truth values as in the truth table above.)

$$x \equiv \_\_r \wedge (\_\_p \Rightarrow \_\_q)$$

Points

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	Total
/10	/15	/10	/10	/8	/10	/7	/10	/10	/90 pts

2. 10 人で握手することを考える。(There are ten people who shake hands with some of them.) (15pts)

   (a) 同じ人数の人と握手した人が必ずいることを説明せよ。(Explain there is a pair shaking hands with the same number of people.)

   (b) このうちの 9 人はみな異なった人数と握手したとする。この 9 人の握手した人数は、$0, 1, 2, \ldots, 8$ が丁度一人ずつか、$1, 2, \ldots, 9$ が丁度一人ずつかの何れかであることを説明せよ。(Suppose that nine of them shook hands with different number of people. Explain that these nine shook hands with $0, 1, 2, \ldots, 8$ people respectively, or $1, 2, 3, \ldots, 9$ people respectively.)

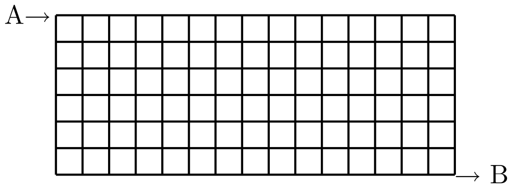
   (c) 前問のように、このうちの 9 人はみな異なった人数と握手したとする。また全員が最低一人とは握手したとする。このとき、丁度 2 人と握手した人は 10 人全体の中でも一人だけで、この人が握手したのは 9 人と握手した人と、8 人と握手した人であることを説明せよ。(Under the condition in (b), assume that everyone shook hands with at least one person. Explain that among the 10, there is exactly one who shook hands with exactly two, and these two are those shook hands with nine and eight people.)

3. 10 点上のグラフについて考える。(Consider graphs with ten vertices.) (10pts)

   (a) 次数が 7 の頂点をもつ (10 点上の) 同型でない木をすべて描け。(Depict all non isomorphic trees with a vertex of degree 7.)

   (b) (10 点上の) 4 正則な二部グラフは、平面的グラフではないことを示せ。(Show that every 4-regular bipartite graph with 10 vertices is nonplanar.)

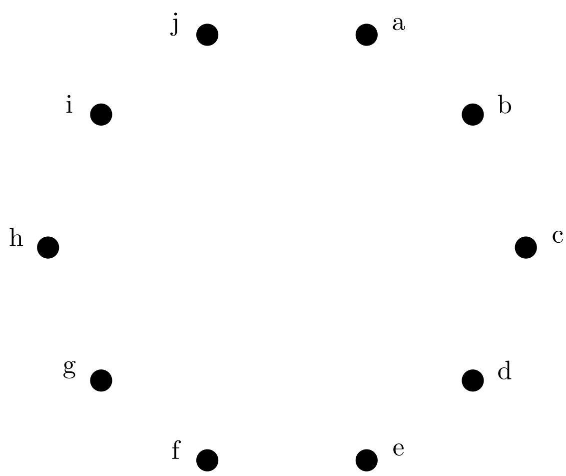
4. (a) 線の上を右か下に進み A から B へ行く行き方の数と、7 日間で 15 冊本を読む時の一日毎に読む本の場合の数とは同じであることを 1 対 1 対応を与えて説明せよ。一冊も読まない日があっても良い。(Explain that the following numbers are equal by giving one-to-one correspondence: (i) The number of ways to move from A to B by going to the right or down. (ii) The number of ways books are read each day when one reads 15 books a week. There may be a day one reads no books.)(10pts)



(b) それらは何通りあるか ${}_nC_m$ の形で表せ。(Express the number in the form ${}_nC_m$.)

5. a, b, c, d, e, f, g, h, i, j を結ぶ（間接でも良い）ネットワークで費用最小のものを作りたい。それぞれの 2 点間を結ぶ費用が次のように与えられている時、その最小の費用はいくらか。そのネットワークも図示せよ。（単位は万円）(Find the least expensive network connecting a, b, c, d, e, f, g, h, i, j indirectly using the cost table below. Draw the network and give its total cost. (1 unit = 10,000 JPY)) (8pts)

	j	i	h	g	f	e	d	c	b
a	6	5	3	5	8	6	1	4	1
b	8	6	2	5	6	5	3	3	
c	7	5	2	5	6	7	3		
d	6	4	3	6	5	5			
e	8	6	6	1	4				
f	5	3	8	5					
g	5	1	9						
h	5	6							
i	4								



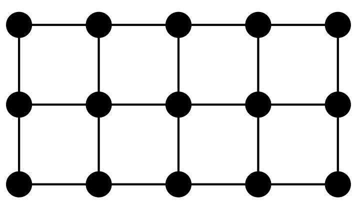
合計 (Total)：

6. Γ は 頂点数が v、辺の数が e、面の数が f である連結な平面グラフで、各面はすべて三辺形だとし、各頂点の次数は、5 または 6 である。 (Γ is a connected plane graph with v vertices, e edges and f faces. Assume each face is surrounded by three edges and the degree of each vertex is either 5 or 6.) (10pts)

   (a) 面の数を 20 としたとき、頂点の数をもとめよ。(Assume that $f = 20$ and find v.)

   (b) 面の数は一般に f としたとき、次数が 5 の頂点は幾つあるか。(For arbitrary f, how many vertices of degree 5 are there in the graph?)

7. 下のグラフはハミルトングラフではないことを、Theorem 7.3 を用いて説明せよ。S, Δ, $\omega(\Delta)$ が何であるかも明示し、ハミルトングラフではない理由を明記すること。 (Show that the graph is not Hamiltonian by applying Theorem 7.3. Describe S, Δ, and $\omega(\Delta)$.) (7pts)



8. 30 日間で 50 冊本を読むことにした。一日最低 1 冊は読むことにする。(A person decided to read 50 books in 30 days at least one book everyday, and recorded the number of books read each day.) (10pts)

   (a) 30 日それぞれ何冊読んだかは、全体で何通りの可能性があるか ${}_nC_m$ の形で示し、なぜそうなるか説明も加えよ。(How many varieties are there for the list of 7 days record of number of books read each day? Give your answer in ${}_nC_m$ form and give an explanation as well.)

   (b) ちょうど 30 冊読んだ期間（何日目から何日目の間）があることを説明せよ。(Explain that there is a certain consecutive days that the total number of books read is exactly 30.)

オイラーの公式 (Euler's Equation)　Γ を連結な平面グラフとする。このとき、次が成り立つ。(Let Γ be a connected plane graph with v vertices, e edges and f faces. Then the following holds.)

$$\text{頂点の個数 } (v) - \text{ 辺の個数 } (e) + \text{面の個数 } (f) = 2$$

9. Γ を頂点の個数が v、辺の個数が e、面の個数が f である連結な平面グラフとする。このとき、上のオイラーの公式を数学的帰納法で証明したい。(We prove the formula by mathematical induction.)(10pts)

   (a) $f = 1$ のときは、Γ は木の定義を満たすことを示し、その場合は、オイラーの公式が成立することを説明せよ。(Suppose $f = 1$. Explain that the graph is a tree and show that the formula is valid in this case.)

   (b) 面の個数が $f' = f - 1 \geqq 1$ のときには、そのときの頂点の数 v', 辺の数 e' に関わらず、オイラーの公式がいつでも成立すると仮定して、面の数が f の場合にオイラーの公式が成立るすことを説明せよ。上の仮定を使うときは、それぞれ v', e' が何であるかも明確にすること。(Suppose the formula is valid if $f' = f - 1 \geqq 1$ for any v' and e'. Explain that the formula holds for the case there are f faces. State clearly what are v' and e' when you use induction hypothesis)

メッセージ　(「ホームページ掲載不可」は明記のこと。If you wish, write "Do Not Post.")

この授業は受講生の皆さんが (a) 論理的思考・数学的思考を体験すること (b) 一つの数学の世界を垣間見ること (c) 数学を楽しむこと、を目的としました。これらについて、および数学一般について、この授業一般について、特に改善点について、私へのメッセージなど何でも書いて下さい。(There are three purposes of this course; (a) to experience logical and mathematical thinking, (b) to have a glimpse of a world of mathematics, (c) to enjoy mathematics. Give comments on these, mathematics in general, or on this course especially for improvements, etc.)

数学の世界 (World of Mathematics) *February 29, 2011*

Solutions to Final Exam AY 2011

以下の問題において授業で扱った Theorem, Proposition を用いる時は、Handout にある番号または、その内容を明記すること。Whenever you apply theorems and propositions in handouts, quote the statements or their numbers.

1. p, q, r を命題とする。(Let p, q, r be propositions.) (10pts)

   (a) 次の式の真理値が常に真になるかどうかを、下の真理表を完成することによって判定せよ。理由も記せ。(Check whether the truth value of the following formula is always T by completing the truth table below.)

$$(p \wedge (\neg q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow r).$$

p	q	r	p	$\wedge$	$(\neg q$	$\Rightarrow$	$r)$	$(p$	$\Rightarrow$	$\neg q)$	$\Rightarrow$	r	x
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	T	T	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	F
T	T	F	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	F	T	F	F	$\boldsymbol{T}$	F	F
T	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	F
T	F	F	T	$\boldsymbol{F}$	T	F	F	T	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	T
F	T	T	F	$\boldsymbol{F}$	F	T	T	F	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	F
F	T	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	T	F	F	T	F	$\boldsymbol{F}$	F	T
F	F	T	F	$\boldsymbol{F}$	T	T	T	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	F
F	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	T	F	F	F	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	T

   [**判定と理由 (Decision and Reason)**]

   正しい: 左辺が T のところは、つねに右辺は T であるので、$(p \wedge (\neg q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow r)$ が常に真である。

   (b) 空欄に適当に $\neg$ を入れて、次の式が正しいようにせよ。ただし x は上の真理表のような真理値を持つ命題とする。(Fill the underlined blanks with $\neg$ in appropriate places so that the following is valid. Here x is a proposition having truth values as in the truth table above.)

   解：上の真理表の左辺と比較して下を得る。

$$x \equiv \underline{\neg}r \wedge (\underline{\quad}p \Rightarrow \underline{\neg}q)$$

Points

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	Total
/10	/15	/10	/10	/8	/10	/7	/10	/10	/90 pts

2. 10 人で握手することを考える。(There are ten people who shake hands with some of them.) (15pts)

(a) 同じ人数の人と握手した人が必ずいることを説明せよ。(Explain there is a pair shaking hands with the same number of people.)

解： 握手の回数の最大は自分以外全員と握手する場合だから 9 である。また 9 人と握手した人がいれば、その人は全員と握手したことになるので、誰とも握手しなかった人はいないことになる。したがって、9 人の人と握手した人がいなければ、握手した人数は、0 から 8 のいずれかだから 9 通り、9 人の人と握手した人がいれば、1 から 9 のやはり 9 通りである。10 人のそれぞれが握手した人数がいずれの場合も 9 通りなので、鳩ノ巣原理により、同じ人数と握手した人が必ずいることになる。 ■

(b) このうちの 9 人はみな異なった人数と握手したとする。この 9 人の握手した人数は、$0, 1, 2, \ldots, 8$ が丁度一人ずつか、$1, 2, \ldots, 9$ が丁度一人ずつかの何れかであることを説明せよ。(Suppose that nine of them shook hands with different number of people. Explain that these nine shook hands with $0, 1, 2, \ldots, 8$ people respectively, or $1, 2, 3, \ldots, 9$ people respectively.)

解： (a) から握手した人数は、0 から 8 の 9 通りか 1 から 9 の 9 通りである。いま、9 人はみな異なった人数と握手したとあるので、どちらの場合もその 9 通りすべて現れることになる。したがって、「この 9 人の握手した人数は、$0, 1, 2, \ldots, 8$ が丁度一人ずつか、$1, 2, \ldots, 9$ が丁度一人ずつかの何れかである」。 ■

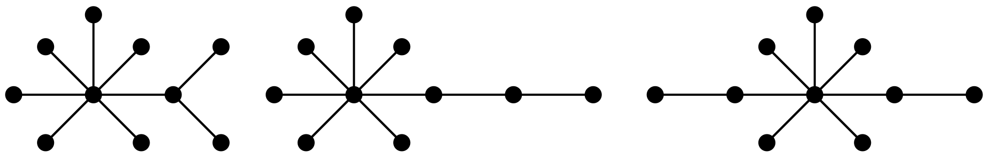
(c) 前問のように、このうちの 9 人はみな異なった人数と握手したとする。また全員が最低一人とは握手したとする。このとき、丁度 2 人と握手した人は 10 人全体の中でも一人だけで、この人が握手したのは 9 人と握手した人と、8 人と握手した人であることを説明せよ。(Under the condition in (b), assume that everyone shook hands with at least one person. Explain that among the 10, there is exactly one who shook hands with exactly two, and these two are those shook hands with nine and eight people.)

解： いま、全員が最低一人と握手したとあるので、(b) より「この 9 人の握手した人数は、$1, 2, \ldots, 9$ が丁度一人ずつである」。さて、この中に丁度一人と握手した人も丁度二人と握手した人も一人いる。9 人と握手した人もおり、このひとは、全員と握手したのだから、丁度一人と握手した人も、丁度二人と握手した人も、丁度この 9 人以外の人も、この 9 人と握手した人と握手している。また丁度一人と握手した人は、それ以外の人とは握手しない。丁度 8 人の人と握手した人もいるが、その人は、丁度一人と握手した人以外全員と握手したことになるので、丁度二人と握手した人とも握手しており、この人の握手した相手は、9 人と握手した人と、8 人と握手した人である。さて、7 人と握手した人もいるが、この人は、丁度一人と握手した人とも、丁度二人と握手した人とも握手できないので、それ以外の全員と握手することになる。すると、この丁度一人と握手した人と丁度二人と握手した人以外はみな、9 人の人と握手した人、8 人の人と握手した人、7 人の人と握手した人と握手しているので、最低でも 3 人の人と握手しており、このことから、丁度二人と握手した人は最初の 9 人の中にいた一人だけで、他にはいないことも分かる。■

3. 10 点上のグラフについて考える。(Consider graphs with ten vertices.) (10pts)

(a) 次数が 7 の頂点をもつ (10 点上の) 同型でない木をすべて描け。(Depict all non isomorphic trees with a vertex of degree 7.)

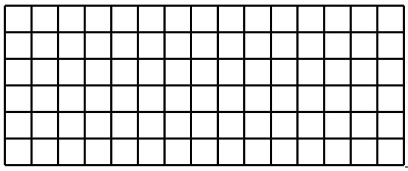
解：木なので、Theorem 6.1 より、辺の本数は、頂点の数より一少ないから、9 である。従って次数の総和は、Theorem 5.1 より 18 である。これより、頂点の次数は、7, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 であるか、または 7, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 である。次数 1 の頂点以外がお互いにつながっているので、7-3, 7-2-2 または 2-7-2 のつながり方をしている。従って、三通りで、以下のいずれかになる。



(b) (10 点上の) 4 正則な二部グラフは、平面的グラフではないことを示せ。(Show that every 4-regular bipartite graph with 10 vertices is nonplanar.)

解：頂点の数 $v = 10$ で 4 正則だから、$40 = 4v = 2e$ より辺の数 $e = 20$。従って、オイラーの公式より、面の数は $f = 2 - v + e = 2 - 10 + 20 = 12$ である。二部グラフなので、各面は最低でも 4 本の辺で囲まれているから、Proposition 8.2 より $48 = 4 \cdot 12 = 4f \leqq 2e = 40$。これは矛盾である。したがって、4 正則な 10 点上の二部グラフは、平面的ではない。 ■

4. (a) 線の上を右か下に進み A から B へ行く行き方の数と、7 日間で 15 冊本を読む時の一日毎に読む本の場合の数とは同じであることを 1 対 1 対応を与えて説明せよ。一冊も読まない日があっても良い。(Explain that the following numbers are equal by giving one-to-one correspondence: (i) The number of ways to move from A to B by going to the right or down. (ii) The number of ways books are read each day when one reads 15 books a week. There may be a day one reads no books.)(10pts)



解：横線が 7 本ある。A から B への道で、1 番上の線を右に進んだステップ数を a_1、2 番目の線を右に進んだステップ数を a_2 などと、$a_1, a_2, \ldots, a_7$ と決めると、全部で横には 15 マスあるので、

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 15$$

である。そこで a_1 を 1 日目に読む本の冊数、a_2 を二日目に読む本の冊数、などとすると、7 日間で丁度、15 冊読むときの一日毎に読む本の冊数が丁度一通り対応する。

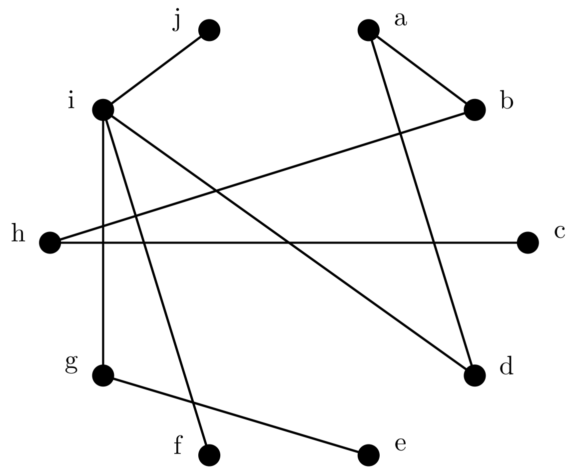
逆に、7 日間それぞれで読む冊数が $a_1, a_2, \ldots, a_7$ と与えられていれば、$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 15$ で、右に a_1 ステップ行って下に一ステップ、つぎに、右に a_2 ステップ行って、下に一ステップ、としていけば、全体で、右に 15 ステップ、下に 6 ステップ行くので、丁度、B にたどり着くので、 A から B への道と対応している。 ■

(b) それらは何通りあるか ${}_nC_m$ の形で表せ。(Express the number in the form ${}_nC_m$.)

解：右と下とあわせて、21 ステップ進み、そのうち、6 ステップ下に進むステップが入るから、全体で、${}_{21}C_6$ 通りあることが分かる。 ■

5. a, b, c, d, e, f, g, h, i, j を結ぶ（間接でも良い）ネットワークで費用最小のものを作りたい。それぞれの 2 点間を結ぶ費用が次のように与えられている時、その最小の費用はいくらか。そのネットワークも図示せよ。（単位は万円）(Find the least expensive network connecting a, b, c, d, e, f, g, h, i, j indirectly using the cost table below. Draw the network and give its total cost. (1 unit = 10,000 JPY)) (8pts)

	j	i	h	g	f	e	d	c	b
a	6	5	3	5	8	6	**1**	4	**1**
b	8	6	**2**	5	6	5	3	3	
c	7	5	**2**	5	6	7	3		
d	6	**4**	3	6	5	5			
e	8	6	6	**1**	4				
f	5	**3**	8	5					
g	5	**1**	9						
h	5	6							
i	**4**								



合計 (Total)： 19 万円

6. Γ は 頂点数が v、辺の数が e、面の数が f である連結な平面グラフで、各面はすべて三辺形だとし、各頂点の次数は、5 または 6 である。(Γ is a connected plane graph with v vertices, e edges and f faces. Assume each face is surrounded by three edges and the degree of each vertex is either 5 or 6.) (10pts)

(a) 面の数を 20 としたとき、頂点の数をもとめよ。(Assume that $f = 20$ and find v.)

解：すべての面が三辺形であることから、Proposition 8.2 より $60 = 3f = 2e$。これより、$e = 30$ を得る。$f = 20$ だからオイラーの公式より、$v = 2 + e - f = 2 + 30 - 20 = 12$ を得、頂点の数は 12 であることが分かる。 ■

(b) 面の数は一般に f としたとき、次数が 5 の頂点は幾つあるか。(For arbitrary f, how many vertices of degree 5 are there in the graph?)

解：次数が 5 の頂点の数を p とする。すると、Theorem 5.1 または、Proposition 8.2 より

$$5p + 6(v - p) = 2e, \text{ したがって } 6v = 2e + p.$$

また、Proposition 8.2 より、各面が三辺形であることを使って、

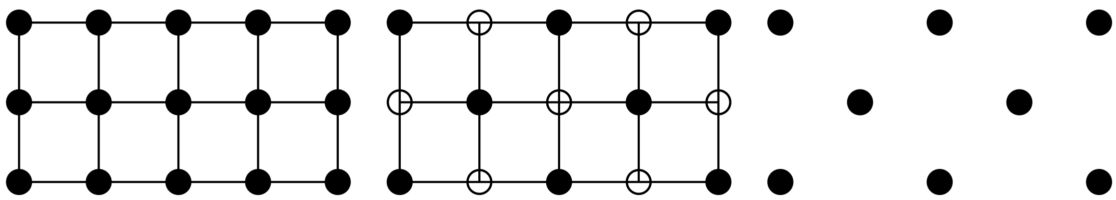
$$3f = 2e.$$

オイラーの公式を使うと

$$2 = v - e + f = \frac{2e + p}{6} - e + \frac{2e}{3} = \frac{p}{6}.$$

したがって、次数が 5 の頂点の数は、12 である。 ■

7. 下のグラフはハミルトングラフではないことを、Theorem 7.3 を用いて説明せよ。S, Δ, $\omega(\Delta)$ が何であるかも明示し、ハミルトングラフではない理由を明記すること。 (Show that the graph is not Hamiltonian by applying Theorem 7.3. Describe S, Δ, and $\omega(\Delta)$.) (7pts)



真ん中の図の白丸からなる 7 頂点を S とする。この頂点を除いてできた一番右のグラフを Δ とすると、これは、すべて孤立した 8 個の頂点からなるグラフなので、連結成分の数は、$\omega(\Delta) = 8$. S の頂点数は 7 なので、Theorem 7.3 より、一番左のグラフはハミルトングラフではないことが分かった。 ■

8. 30 日間で 50 冊本を読むことにした。一日最低 1 冊は読むことにする。 (A person decided to read 50 books in 30 days at least one book everyday, and recorded the number of books read each day.) (10pts)

   (a) 30 日ぞれぞれ何冊読んだかは、全体で何通りの可能性があるか ${}_nC_m$ の形で示し、なぜそうなるか説明も加えよ。(How many varieties are there for the list of 7 days record of number of books read each day? Give your answer in ${}_nC_m$ form and give an explanation as well.)

   解：50 冊を 30 日 に分け、必ず、どの日にも 1 冊は入るようにするのと同じなので、50 冊を一列にならべ、その 49 の本と本の間のうち、29 個に仕切りをいれれば、全体で 30 に分けることができる。したがって、その場合の数は

$$ {}_{49}C_{29} $$

   (b) ちょうど 30 冊読んだ期間（何日目から何日目の間）があることを説明せよ。(Explain that there is a certain consecutive days that the total number of books read is exactly 30.)

   解：1 日目に読んだ冊数を b_1、2 日目までに読んだ冊数を b_2、3 日までに読んだ冊数を b_3、$\ldots$, 30 日目までに読んだ冊数を b_{30} とする。すると、毎日一冊は読むのだから、$b_1, b_2, \ldots, b_{40}$ は増加していき、最後は、50 になる。

$$ 1 \leqq b_1 < b_2 < b_3 < \cdots < b_{30} = 50. $$

   ここで $b_1, b_2, \ldots, b_{30}$ を 30 で割り、商を $q_1, q_2, \ldots, q_{30}$、あまりを $r_1, r_2, \ldots, r_{30}$ とすると、$b_1 = 30q_1 + r_1$, $b_2 = 30q_2 + r_2$, $\ldots$, $b_{30} = 30q_{30} + r_{30}$ と書くことができる。ここで、$r_1, r_2, \ldots, r_{30}$ はあまりだから 0 以上、29 以下である。

   Case 1. $r_1, r_2, \ldots, r_{30}$ のうちどれかが 0 となるとき。

   $r_i = 0$ とすると、$b_i = 30q_i$ だから i 日目までに読んだ冊数が 30 で割り切れることになる。これは、$1 \leqq b_i \leqq 50$ だから 30 の倍数ということから $b_i = 30$ つまり、最初の日から i 日目まで丁度 30 冊読んだことになる。

   Case 2. $r_1, r_2, \ldots, r_{30}$ のどれも 0 とならないとき。

これらは、1 以上 29 以下となるので、鳩の巣原理により、同じものが存在する。それを $r_i = r_j = r$ $(i < j)$ とすると、$b_i = 30q_i + r$, $b_j = 30q_j + r$ と書けるから、$i < j$ より $b_i < b_j$ に注意して、差をとると $b_j - b_i = 30(q_j - q_i)$ となる。つまり、$b_j - b_i$ も 30 の倍数である。この数も 1 以上、50 以下だから（実際には b_i をひいているので、49 以下）、30 の倍数ということより $b_j - b_i = 30$ となる。これは、j 日目まで読んだ本の数から、i 日目までに読んだ本の数を引くのだから、$i+1$ 日目から、j 日目まで読んだ本の数が丁度 30 冊であることを意味する。

従って、いずれの場合も、丁度 30 冊読んだ期間があることが分かった。 ■

オイラーの公式 (Euler's Equation)　Γ を連結な平面グラフとする。このとき、次が成り立つ。(Let Γ be a connected plane graph with v vertices, e edges and f faces. Then the following holds.)

$$\text{頂点の個数 } (v) - \text{ 辺の個数 } (e) + \text{面の個数 } (f) = 2$$

9. Γ を頂点の個数が v、辺の個数が e、面の個数が f である連結な平面グラフとする。このとき、上のオイラーの公式を数学的帰納法で証明したい。(We prove the formula by mathematical induction.)(10pts)

(a) $f = 1$ のときは、Γ は木の定義を満たすことを示し、その場合は、オイラーの公式が成立することを説明せよ。(Suppose $f = 1$. Explain that the graph is a tree and show that the formula is valid in this case.)

解：木の定義は、連結で閉路のないグラフである。$f = 1$ ということは、閉路がないということである。最初から、連結は仮定されているから、この時は、グラフは、木となる。木のときは、Theorem 6.1 によって、辺の数は、頂点の数より一つ少ないので、$e = v - 1$ したがって、$f = 1$ という仮定より、

$$v - e + f = v - (v - 1) + 1 = 2.$$

となり、この場合は、オイラーの公式がなりたつ。 ■

(b) 面の個数が $f' = f - 1 \geqq 1$ のときには、そのときの頂点の数 v', 辺の数 e' に関わらず、オイラーの公式がいつでも成立すると仮定して、面の数が f の場合にオイラーの公式が成立るすことを説明せよ。上の仮定を使うときは、それぞれ v', e' が何であるかも明確にすること。(Suppose the formula is valid if $f' = f - 1 \geqq 1$ for any v' and e'. Explain that the formula holds for the case there are f faces. State clearly what are v' and e' when you use induction hypothesis)

解：(a) より $f \geqq 2$ としてよい。つまり、面の数は、1 ではないので、一番外側以外の面が存在する。すなわち、閉路が存在する。閉路の中の辺は、内側と外側の面に接している。その辺を一つ取り除くと、その辺の両側の面は一つになるが、その辺が接しているのは、二つの面だけなので、その辺を取り除いてできるグラフは、面が一つ減り $f' = f - 1 \geqq 1$、辺も一つ減り $e' = e - 1$、頂点は変化しない。$v' = v$。また閉路内の辺を一つ取り除いただけなので、連結であることは、変化しない。したがって、このグラフは、連結な平面グラフで、面の数が一つ少ない。仮定からこの場合は、オイラーの公式が成立するので、

$$2 = v' - e' + f' = v - (e - 1) + (f - 1) = v - e + f.$$

したがって、面の数が f の連結な平面グラフにおいても、オイラーの公式が成立する。 ■