Solutions to Quiz 3

円盤を積む場所が 3 箇所 (A, B, C とする) あり、その一つに大きさの異なる n 枚の円盤が下から大きい順に積まれており、円盤の移動は 1 回につき 1 枚、円盤の上にはより小さな円盤しか載せないとする。この条件のもとで、次の命題を考える。

$p(n)$: $2^n - 1$ 回の移動ですべての円盤を指定された他の場所に移動させることができる。(Hanoi's Tower with n disks can be completed in $2^n - 1$ steps.)

1. $p(6)$ は真だとし $p(7)$ が真であることを説明せよ。(Explain that $p(7)$ is true assuming that $p(6)$ is true.)

   解：最初に 7 枚積まれている場所を A' 移動先を B' とし、三箇所のうのちもう一箇所を C' とする。

   Step 1. $p(6)$ は真であるから、A' に積まれている小さい方から 6 枚を $2^6 - 1 = 63$ 回の移動で C' に移すことができる。

   Step 2. Step 1 によって A' には一番大きい盤のみがあり他はすべて C' にあるから、B' には一枚も盤がないので、A' にある一番大きな盤を B' に一回の移動で移すことができる。

   Step 3. Step 2 により A' には一枚も盤はなく、B' には一番大きい盤のみ、C' には、小さい方から 6 枚の盤が積まれている。$p(6)$ あ真だから、$2^6 - 1 = 63$ 回の移動で B' に C' の 6 枚全てを移動し、完成する事ができる。合計の移動回数は、Step 1, 2, 3 併せて

   $$(2^6 - 1) + 1 + (2^6 - 1) = 2 \times 2^6 - 1 = 2^7 - 1. \quad 63 + 1 + 63 = 127 = 2^7 - 1.$$

   最初の A', B', C' はそれぞれ A, B, C のどんな順列でも良かったから、$p(7)$ は真であることを示すことができた。

2. $n = 4$ で A から C に移すとき A の一番小さい円盤は最初に B, C のどちらに移したらよいか。$n = 5$ のときはどうか。(Move from A to C. What is the first move when $n = 4$ and $n = 5$?)

   $n = 4$ のときの最初の移動先 (First move the smallest to)： B
   $n = 5$ のときの最初の移動先 (First move the smallest to)： C

   解説. 小さい方から順に盤に、1, 2, 3, 4, 5 と名前をつける。

   $n = 4$ のときは、最終的に 4 を C に移動したい。そのためには、1–3 を B に移動したい。そのためには、1–2 を C に移動できればよい。そのためには、1 を B に最初に移動することが必要である。

   $n = 5$ のときも同様に順に考えると、1 を C に移動することが最初のステップであることが分かる。実際、n が奇数なら、最初のステップは全体の移動先と同じで、偶数なら、全体の移動先ではないところに動かすことになる。

3. 円盤を小さい方から $1, 2, \ldots, 7$ とし、今それぞれ、7 が A に、5,4,3,2,1 が下から順に B に、 6 が C の柱に通してあるとする。最短手順で 7 を A 以外に移動しその上にすべて積むことにすると、それは、どこに積まれることになるか。またそれまで、何回移動が必要か。(A: 7, B: 5, 4, 3, 2, 1, C: 6. Move A to B or C and complete it with minimum number of moves.)

   移動先 (Move to)： B　　移動回数 (How many moves?)： 95 回

   Step 1. 5 枚を C に載せるのに $2^5 - 1 = 31$ 回、一番大きい盤を B に移動するのに 1 回、その上に、6 枚を載せるのに、$2^6 - 1 = 63$ 回。したがって、$31 + 1 + 63 = 95$ 回。

   これが最短であることを示すのは、あまり簡単ではないが、上でのべた移動が最小であることが分かるので、これは、その中に含まれているので最短である。他の説明も考えてみて下さい。