

Solutions to Quiz 4

1. ある年度アーツサイエンス学科の4月入学生は683人いた。この中には、First Initial も Last Initial も同じ学生が絶対にいたことを鳩の巣原理を用いて説明してください。(アルファベットは26文字) Among 693 April students, there is a pair with the same first and last initial.

解: First Initial は26通り、Last Initial も26通りあるので、その組み合わせは $26 \times 26 = 676$ 通りである。683人がこの676通りのイニシャルのうちのどれかで、 $683 > 676$ だから鳩の巣原理によって、同じイニシャルの人が必ずいる事になる。 ■

2. 冬休みの14日間に20冊の本を読み、必ず毎日一冊は読み終える事にし、読み終わった日を記録した。ある日からある日の間に読み終わった本の合計がちょうど7冊になるような期間が必ずあることを鳩の巣原理を用いて説明してください。 If 20 books were read in 14 days and at least one each day, then the total number of books read between some day to the other is exactly seven.

解: 1日目に読んだ本の数を a_1 、2日目に読んだ本の数を a_2 、おなじように14日目に読んだ本の数を a_{14} とする。さらに、 $b_1 = a_1$, $b_2 = a_1 + a_2$, $b_3 = a_1 + a_2 + a_3$, などとし、 $b_{14} = a_1 + a_2 + \dots + a_{14}$ とする。すると b_1 は、1日目に読み終わった本の数、 b_2 は、2日目までに読み終わった本の数、 b_{14} は14日目までに読み終わった本の数などとなる。一日かならず、1冊は読むのだから、

$$1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_{14} = 20. \quad (1)$$

ここでこれらに7を加えたものを考えると

$$8 \leq b_1 + 7 < b_2 + 7 < \dots < b_{14} + 7 = 27. \quad (2)$$

すると、次のようになっている。

$$1 \leq b_1, b_2, \dots, b_{14}, b_1 + 7, b_2 + 7, \dots, b_{14} + 7 \leq 27$$

28個の数がみな1以上27以下だからかならず同じ数が存在する。 b_1, b_2, \dots, b_{14} は(1)よりすべて異なり、 $b_1 + 7, b_2 + 7, \dots, b_{14} + 7$ は(2)よりすべて異なるので、同じになるのは、 b_1, b_2, \dots, b_{14} のどれかと、 $b_1 + 7, b_2 + 7, \dots, b_{14} + 7$ のどれかである。それを b_i と $b_j + 7$ とすると、 $b_i = b_j + 7$ だから $b_i - b_j = 7$ 。一方、 b_i, b_j の定義を考えると、 $i > j$ だから

$$b_i - b_j = (a_1 + a_2 + \dots + a_j + a_{j+1} + \dots + a_i) - (a_1 + a_2 + \dots + a_j) = a_{j+1} + \dots + a_i$$

この数が、 $b_i - b_j = 7$ より7だから、 $j + 1$ 日目から i 日目までに読み終わった本の数の合計は7冊であることを意味している。 ■