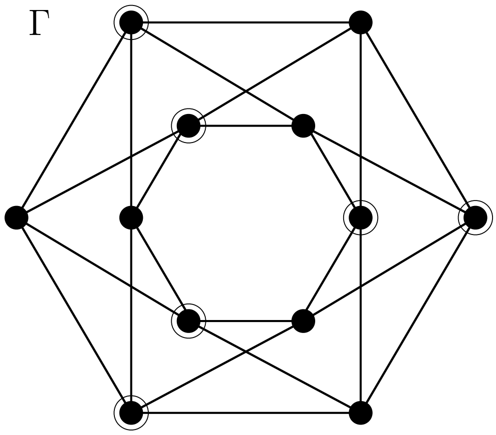
Solutions to Quiz 8

1. 下のグラフ Γ について、(a) 二部グラフであることを示せ。Γ is bipartite. (b) 平面グラフに描くことができたとすると面の数はいくつか。If there is a plane graph isomorphic to Γ, how many faces does it have? (c) 平面的グラフではないことを示せ。Show that Γ is non-planar.

Γ



(a) 丸をつけた頂点からなる集合を X、付けなかった頂点からなる集合を Y とすると、X の頂点同志、Y の頂点同志は、隣接していないから、このグラフは、二部グラフである。(Let X be the set of six encircled vertices and Y the rest. Then every edge consists of one vertex of X and one vertex of Y, Γ is bipartite.)

(b) 頂点の数 $v = 12$、辺の数 $e = 24$ だから、オイラーの公式により、面の数は、(Since $v = 12$ and $e = 24$ by Euler's formula, we have)

$$f = 2 - v + e = 2 - 12 + 24 = 14$$

である。

(c) 平面グラフに描けたとすると、(b) より面の数は、14 である。(a) より二部グラフだから、各面は、4 本以上の辺で構成される。したがって、Proposition 8.2 (ii) より (Suppose there is a plane graph isomorphic to Γ, the number of faces has to be 1 by (b). Since it is a bipartite graph by (a), every closed circuit is of even length. Thus every face is surrounded by at least 4 edges. Thus by Proposition 8.2 (ii),)

$$48 = 2e \geqq 4f = 4 \times 14 = 56$$

これは、矛盾である。したがって、平面的グラフではない。(This is a contradiction. Hence Γ is not a planar graph.)

2. ある連結な平面グラフは、3-正則で、各面はすべて 3 辺形か 6 辺形である。このグラフの 3 辺形の総数を求めよ。A connected plane graph is 3-regular and every face is either a 3-gon or a 6-gon. Find the number of 3-gons.

Soln. 頂点の数を v、辺の数を e、面の数を f、3 辺形の数を t とする。このとき、Proposition 8.2 により (Let v be the number of vertices, e the number of edges, f the number of faces and t the number of 3-gons. Then by Proposition 8.2,)

$$3v = 2e = 3t + 6(f - t) = 6f - 3t.$$

これより、$f = (2e + 3t)/6$。オイラーの公式を用いると (By applying the Euler's formular, we have)

$$2 = v - e + f = \frac{2}{3}e - e + \frac{2e + 3t}{6} = \frac{t}{2}.$$

したがって、$t = 4$ で、三辺形の数は 4 である。Therefore the number t of 3-gons is four.