

# Solutions to Quiz 4

Aさんは260章ある新約聖書を100日間で読んだ。一日最低1章は読み、毎日読んだ章数を記録した。 $a_n$ を $n$ 日目に読んだ章の数、 $b_n$ を $n$ 日目までに読んだ章数とすると、 $b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ となる。 $b_n$ を100で割った商を $q_n$ 、余りを $r_n$ とすると、 $b_n = 100q_n + r_n$  ( $0 \leq r_n \leq 99$ )と書くことができる。Miss A read through all 260 chapters of the New Testament of the Bible in 100 days. She read at least one chapter a day, and recorded the number of chapters she read each day. Let  $a_n$  be the number of chapters she read on day  $n$ , and  $b_n$  the total number of chapters she read from day 1 to day  $n$ , i.e.,  $b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . Let  $b_n = 100q_n + r_n$  with  $0 \leq r_n \leq 99$  for  $n = 1, 2, \dots, 100$ , i.e.,  $q_n$  is the quotient,  $r_n$  is the remainder when dividing  $b_n$  by 100. (e.g. If  $b_{90} = 220$ , then  $220 = 100 \times 2 + 20$ . In this case  $n = 90$ ,  $q_{90} = 2$  and  $r_{90} = 20$ .)

1. 次の文章が常に正しいときには True を丸で囲み、そうでないとき False を丸で囲め。If the statement is always true, encircle 'True', and encircle 'False' otherwise.

(a) 丁度2章読んだ日がある。One day she read exactly 2 chapters. .... True / **False**

(b) 丁度3章読んだ日がある。One day she read exactly 3 chapters. .... True / **False**

(c) 丁度1章か2章読んだ日がある。One day she read exactly one or two chapters.  
..... **True** / False

(d) 3章以上読んだ日がある。One day she read at least 3 chapters. .... **True** / False

2. どの  $r_n$  も 0 でないならば、余りのどれか (たとえば  $r_i$ ) と、他の余りのどれか (たとえば  $r_j$ ) とは等しいことを説明せよ。どこで鳩の巣原理を用いたか明示すること。Suppose none of  $r_n$  is zero for  $n = 1, 2, \dots, 100$ . Explain the fact that some  $r_i$  is equal to some other  $r_j$ . Clearly state when you use the pigeonhole principle.

**Soln.** 一般に、 $0 \leq r_n \leq 99$  であるが、いまどの  $r_n$  も 0 ではないので、すべて  $1 \leq r_n \leq 99$  である。 $r_1, r_2, \dots, r_{100}$  がすべて1から99のどれかであるから、鳩の巣原理によって、この中に、同じ数がある。すなわち「余りのどれか (たとえば  $r_i$ ) と、他の余りのどれか (たとえば  $r_j$ ) とは等しい。」

In general,  $0 \leq r_n \leq 99$ . But by our assumption, none of  $r_n$  equals 0. So  $r_1, r_2, \dots, r_{100}$  are between 1 and 99. By the pigeonhole principle, 'some  $r_i$  must be equal to some other  $r_j$ '.

3. 丁度100章読んだ期間か丁度200章読んだ期間があることを説明せよ。Explain that over some period she read exactly 100 chapters or 200 chapters.

**Soln.** 260以下で100の倍数は、100か200である。さて、もし  $r_n$  のうちのどれかが0だとすると、 $b_n = 100q_n$  と書いているから、 $n$ 日目までの期間に100の倍数の章数を読んだことになるが、最初にしたことから、この期間に100章か200章読んだことになる。もし、 $r_n$  のうちのどれも0でないとする、前問から「余りのどれか (たとえば  $r_i$ ) と、他の余りのどれか (たとえば  $r_j$ ) とは等しい。」すると、 $b_i = 100q_i + r_i$ ,  $b_j = 100q_j + r_j$  で、 $r_i = r_j$  となっている。 $i < j$  とすると、 $b_j - b_i = (100q_j + r_j) - (100q_i + r_i) = 100(q_j - q_i)$  となる。一方、 $b_j - b_i = (a_1 + a_2 + \dots + a_i + a_{i+1} + \dots + a_j) + (a_1 + a_2 + \dots + a_i) = a_{i+1} + \dots + a_j$ 。したがって、 $a_{i+1} + \dots + a_j = 100(q_j - q_i)$ 。すなわち  $i+1$ 日目から  $j$ 日目までに読んだ章の数が100の倍数となるが、最初の注意から、丁度100または200になる。

If the number of chapters read over a period is divisible by 100, it has to be either 100 or 200 as the total number of chapters is 260. If some of  $r_n$  is zero, then  $b_n = 100q_n$ , and she read 100 or 200 chapters from day 1 to day  $n$ . If none of  $r_n$  is zero, by the previous problem, some  $r_i$  is equal to some other  $r_j$ . On one hand,  $b_j - b_i = (100q_j + r_j) - (100q_i + r_i) = 100(q_j - q_i)$ . On the other hand,  $b_j - b_i$  is the total number of chapters she read from day  $i+1$  to  $j$ , by our remark above, over some period, i.e., from day  $i+1$  to day  $j$ , she read exactly 100 chapters or 200 chapters.