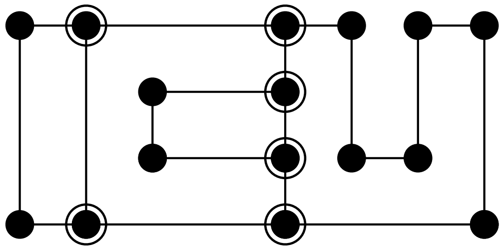
Solutions to Quiz 7

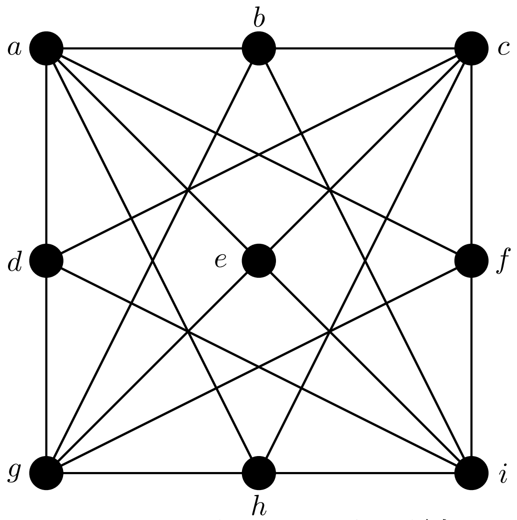
1. 下のグラフには一筆書きはできないこと（すなわち、オイラー路は存在しないこと）をこのクラスを受講していない ICU 生にわかるように説明して下さい。Explain that the following graph can not be drawn in one stroke, i.e., there is no Eulerian path, so that ICU students who are not taking this course may understand.

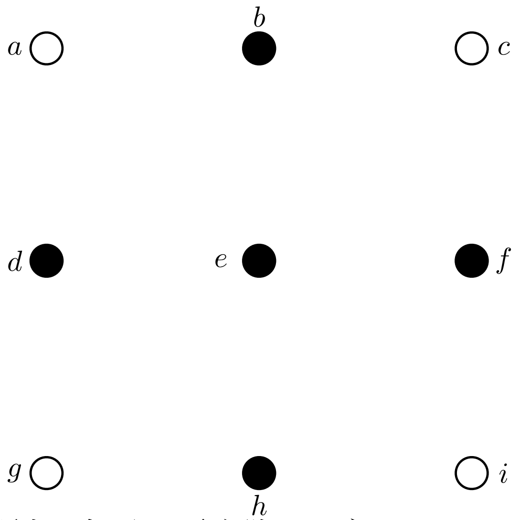


Soln. オイラー路は、各辺（線）を丁度一回ずつ通る路なので、オイラー路があるかという問題は、このグラフが一筆書きできるかという問題と同じです。一筆書きできたとすると、各頂点（黒丸）を通る毎に、そこに到達する前に通る辺（線）と出て行くときに通る辺（線）二つずつ辺（線）を通るので、各頂点（黒丸）から出ている辺（線）の数（次数という）はスタート地点とゴール地点を除いて偶数でなければなりません。つまり奇数本の辺（線）が出ている頂点（黒丸）は（スタートとゴールだけは別で、それは同じかも知れないので）２個以下でなければなりません。このグラフは丸をつけた 6 頂点（黒丸）から出ている辺（線）の数が 3 で奇数だから、不可能です。従って、一筆書きはできません。

A Eulerian path is a route on the figure which visits every edge (line segment) exactly once, so it can be thought of a figure that can be drawn in one stroke. Every path uses two edges when it passes each vertex. If there is a route that visits every edge exactly once, the degree of each vertex, i.e., the number of edges going out from it, has to be even except the starting and finishing vertices. However, there are three edges going out from 6 encircled vertices, this is not the case. Thus this graph cannot be drawn in one stroke.

2. 下のグラフはハミルトングラフではないことを、Theorem 7.3 を用いて説明せよ。S, Δ, $\omega(\Delta)$ が何であるかも明示し、ハミルトングラフではない理由を明記すること。Show that the graph below is not Hamiltonian by applying Theorem 7.3. Describe S, Δ, and $\omega(\Delta)$.





$S = \{a, c, g, i\}$ とする。これらの頂点とその頂点を含む辺を取り除いたグラフを Δ とすると、それは、右上のグラフになる。この連結成分の数は、5 だから $\omega(\Delta) = 5$. ハミルトングラフなら、定理 7.3 より $5 = \omega(\Delta) \leqq |S| = 4$ とならなければならないが、これは、矛盾である。ここで $|S|$ は、S に含まれる要素の数を表します。 ■

Set $S = \{a, c, g, i\}$. Let Δ be the graph obtained by deleting S, which is depicted on the right of the original graph. Then the number of connected components of Δ is four. By Theorem 7.3, if the graph is Hamiltonian, $5 = \omega(\Delta) \leqq |S| = 4$. This is a contradiction. Thus, the graph is not Hamiltonian. Here $|S|$ denotes the number of elements in S. ■