Quiz 1

ID#: **Name:**

p, q, r を命題、x, y, z, w を p, q, r の結合命題とする。Let p, q and r be statements, and x, y, z and w compound statements of p, q and r.

1. 下の真理表を完成せよ。Complete the truth table below.

p	q	r	$(p \wedge r) \Rightarrow (q \vee \neg r)$	$(\neg p \vee q) \vee \neg r$	x	y	z	w
T	T	T			T	F	F	F
T	T	F			T	F	F	F
T	F	T			T	F	F	F
T	F	F			T	T	F	T
F	T	T			T	F	F	T
F	T	F			F	F	T	T
F	F	T			T	F	F	F
F	F	F			T	F	F	F

2. $s \equiv (p \wedge r) \Rightarrow (q \vee \neg r)$, $t \equiv (\neg p \vee q) \vee \neg r$. 正しいものを選べ。Choose the correct one.

   (a) $s \equiv t$ (b) $s \equiv \neg t$ (c) どちらでもない。Neither (a) nor (b).

3. $s \equiv (p \wedge r) \Rightarrow (q \vee \neg r)$ を $\neg$ と $\wedge$ と 括弧だけを用いて表せ。Express s using $\neg$, $\wedge$ and parentheses only.

4. 上の真理表の x および w を表す論理式になるように、下の 下線の部分に、$\neg$, $\wedge$, または、$\vee$ を入れよ。空欄となる箇所があるかも知れない。ただし、y と z は上の真理表の真理値をもつものとする。(Fill each underlined blank with $\neg$, $\wedge$ or $\vee$ to express x and w in the truth table above. There may be voids. y and z are compound logical statements having truth values written in the table)

$$
\begin{aligned}
x &\equiv ((\_\_\ p) \vee (\_\_\ q))\ \_\_\ (\_\_\ r), \\
w &\equiv (y \vee z)\ \_\_(((\_\_\ p) \wedge (\_\_\ q))\ \_\_\ (\_\_\ r)).
\end{aligned}
$$

Message 欄：将来の夢、25 年後の自分について、世界について。What is your dream? Describe your vision of yourself and the world 25 years from now.（「HP 掲載不可」は明記の事。If you don't want your message to be posted, write "Do Not Post."）

Solutions to Quiz 1

p, q, r を命題、x, y, z, w を p, q, r の結合命題とする。Let p, q and r be statements, and x, y, z and w compound statements of p, q and r.

1. 下の真理表を完成せよ。Complete the truth table below.

p	q	r	$(p\ \wedge\ r)$	$\Rightarrow$	$(q$	$\vee$	$\neg r)$	$(\neg p\ \vee\ q)$	$\vee$	$\neg r$	x	y	z	w
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	F	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	F	F	F
T	T	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	F	F	F
T	F	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	T	F	F	F
T	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	F	T
F	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	T	F	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	F	F	T
F	T	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	F	F	T	T
F	F	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	F	F	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	F	F	F
F	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	F	F	F

2. $s \equiv (p \wedge r) \Rightarrow (q \vee \neg r)$, $t \equiv (\neg p \vee q) \vee \neg r$. 正しいものを選べ。Choose the correct one.

   $\boxed{\text{(a) } s \equiv t}$ (b) $s \equiv \neg t$ (c) どちらでもない。Neither (a) nor (b).

3. $s \equiv (p \wedge r) \Rightarrow (q \vee \neg r)$ を $\neg$ と $\wedge$ と 括弧だけを用いて表せ。Express s using $\neg$, $\wedge$ and parentheses only.

   Soln. Since $\neg\neg x \equiv x$, $x \Rightarrow y \equiv \neg x \vee y$ and $x \vee y \equiv \neg(\neg x \wedge \neg y)$,

   $$s \equiv (p \wedge r) \Rightarrow (q \vee \neg r) \equiv \neg(p \wedge r) \vee (q \vee \neg r) \equiv \neg((p \wedge r) \wedge \neg(q \vee \neg r)) \equiv \neg((p \wedge r) \wedge (\neg q \wedge r)).$$

   Other Solution: Using 2,

   $$s \equiv (p \wedge r) \Rightarrow (q \vee \neg r) \equiv (\neg p \vee q) \vee \neg r \equiv \neg(p \wedge \neg q) \vee \neg r \equiv \neg((p \wedge \neg q) \wedge r).$$

4. 上の真理表の x および w を表す論理式になるように、下の 下線の部分に、$\neg$, $\wedge$, または、$\vee$ を入れよ。空欄となる箇所があるかも知れない。ただし、y と z は上の真理表の真理値をもつものとする。(Fill each underlined blank with $\neg$, $\wedge$ or $\vee$ to express x and w in the truth table above. There may be voids. y and z are compound logical statements having truth values written in the table)

$$\begin{aligned} x &\equiv ((\underline{\quad}\, p)\ \vee\ (\underline{\neg}\, q))\ \underline{\vee}\ (\underline{\quad}\, r), \\ w &\equiv (y\ \vee\ z)\ \underline{\vee}\ (((\underline{\neg}\, p)\ \wedge\ (\underline{\quad}\, q))\ \underline{\wedge}\ (\underline{\quad}\, r)). \end{aligned}$$

Quiz 2

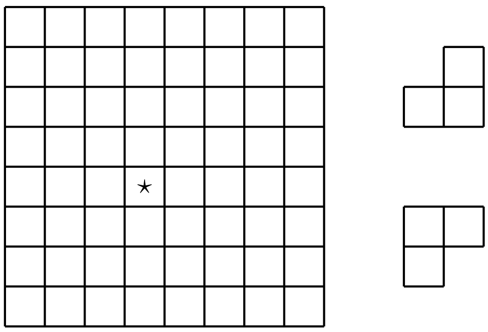
ID#: **Name:**

1. 自然数 9 を 4 個の自然数の和として表すとき、加える数の順序も考慮に入れて何通りの表し方があるか。 In how many ways can 9 be expressed as a sum of 4 positive integers if the order of terms are taken into consideration? (4pts)

   (a) 答えを ${}_nC_m$ の形で表せ。Express the number in the form ${}_nC_m$.

   (b) 理由を ${}_nC_m$ の意味だけを知っている人が理解できるように記せ。Explain the reason so that whoever knows the meaning of ${}_nC_m$ can understand.

2. 下のようなチェス盤から、$\star$ のところを取り除いたものは、右の二種類の板では敷き詰められないことをこの授業を履修していない ICU の学生にも理解できるように説明せよ。Explain the fact that it is impossible to cover up the board except the square with $\star$ without overlapping using two types of plates below so that ICU students who are not taking this course can understand. (6pts)



Message 欄（裏にもどうぞ）： あなたにとって一番たいせつな（または、たいせつにしたい）もの、ことはなんですか。What is most precious to you?（「HP 掲載不可」は明記の事。If you don't want your message to be posted, write "Do Not Post."）

Solutions to Quiz 2

1. 自然数 9 を 4 個の自然数の和として表すとき、加える数の順序も考慮に入れて何通りの表し方があるか。 In how many ways can 9 be expressed as a sum of 4 positive integers if the order of terms are taken into consideration? (4pts)

   (a) 答えを ${}_nC_m$ の形で表せ。Express the number in the form ${}_nC_m$.

   Soln. ${}_8C_3$.

   (b) 理由を ${}_nC_m$ の意味だけを知っている人が理解できるように記せ。Explain the reason so that whoever knows the meaning of ${}_nC_m$ can understand.

   Soln.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} & & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 & & 8 & \\ & & 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 \end{array}$$

2. 下のようなチェス盤から、⋆ のところを取り除いたものは、1×3 の板では敷き詰められないことを説明せよ。Explain the fact that it is impossible to cover up the board without overlapping using 1×3 plates below. (6pts)

1	2		1	2		1	2
	1	2		1	2		1
2		1	2		1	2	
1	2		1	2		1	2
	1	2	⋆	1	2		1
2		1	2		1	2	
1	2		1	2		1	2
	1	2		1	2		1

×	×		×	×		×	×
	×	×		×	×		×
×		×	×		×	×	
×	×		×	×		×	×
	×	×	⋆	×	×		×
×		×	×		×	×	
×	×		×	×		×	×
	×	×		×	×		×

左の図のように、1, 2 または × を書くと、いずれの場合もなにも書かなかったマスが 20 個である。1×3 の板で敷き詰めることができたと仮定する。すると ⋆ のないマスは 63 個であるから、 1 × 3 の板は 21 枚必要である。またこれらの板は、縦か横に 3 マスおおう事になる。このとき、数字や × の書き方から、どの板も、なにも書かれていないマスを丁度一個ずつおおう。したがって、21 枚ではなにも書かなかったマスを 21 おおう事になるが、最初に書いたように、この盤には、なにも書かなかったマスは、20 個であり、矛盾である。従って、1 × 3 の板で、⋆ 以外の全体を重なることなく敷き詰めることはできない。

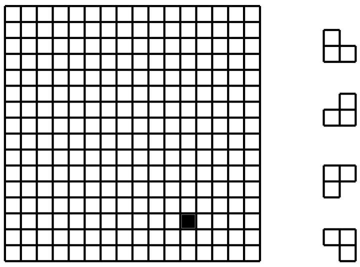
Write 1, 2 or × as in the boards above. Observe that there are 20 squares with no marks in either case.

Suppose this board can be covered up by 1×3 plates without overlapping. Since there are 63 squares, we need 21 plates. In order to cover up without overlapping, each plate has to be placed either horizontally or vertically covering up three squares. Moreover, each plate covers up exactly one square with no marks. So with 21 plates 21 squares with no marks are to be covered, contradicting our first observation that there are only 20 squares with no marks. Therefore it is impossible to cover up the board without overlapping.

Quiz 3

ID#: **Name:**

1. 下の 16×16 の盤は、■ のところに限らず、どこを 1 箇所取り除いても、下の 4 種類の板を使って、重ならないように敷き詰められることを説明せよ。ただし、8×8 の盤は、どこを 1 箇所取り除いても、敷き詰められることは仮定して良い。Consider the 16×16 board with one square removed. The figure below is an example. Explain that no matter which square is removed, the board can be completely filled up by 4 types of plates below without overlapping. You may use the fact that 8×8 board can be filled up no matter which square is removed.



2. Figure 1 ようなハノイの塔のゲームを考える。Figures 2, 3 は A にあった 6 枚の円盤を B または C に最少手数で移動させている途中である。それぞれ、どこに移動する途中かと、次の移動と、最少手数ではあと何回の移動が必要かを答えよ。(Consider the Hanoi's Tower with 6 disks as in Figure 1. We are in the process of moving 6 disks from A to B or C with minimal number of steps. Answer the following in each case.) 適切なものに丸をし、下線に数を書き入れよ。(Encircle the appropriate choices and fill the number in blank.)

   (a) Figure 2. A:6,5,2 B:1 C:4,3

   移動先 (Destination)： B　C　次の移動 (Next move)：1 → A, 1 → C, or 2 → C.

   移動回数 (How many moves left?)：________ 回

   (b) Figure 3. A:6,3,2,1, B:5,4, C:

   移動先 (Destination)： B　C　次の移動 (Next move)：1 → B, 1 → C, or 4 → C.

   移動回数 (How many moves left?)：________ 回

Figure 1

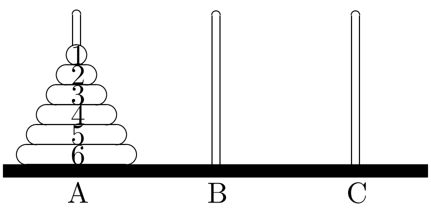


Figure 2

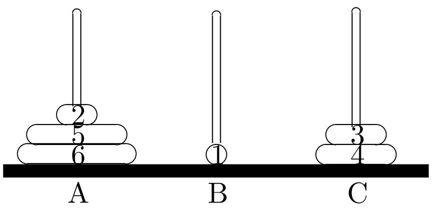
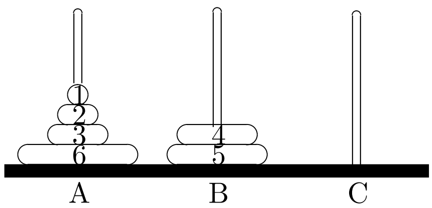


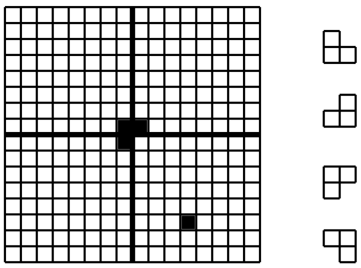
Figure 3

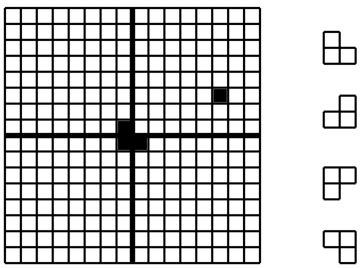


Message 欄 (裏にもどうぞ)：最近のことで、とても嬉しかった (感謝している) こと、悲しかったこと、怒っていること。(Anything that made you rejoice, sad or angry, or you are thankful of recently?)
(「HP 掲載不可」は明記の事。If you don't want your message to be posted, write "Do Not Post.")

Solutions to Quiz 3

1. 下の 16×16 の盤は、■ のところに限らず、どこを 1 箇所取り除いても、下の 4 種類の板を使って、重ならないように敷き詰められることを説明せよ。ただし、8×8 の盤は、どこを 1 箇所取り除いても、敷き詰められることは仮定して良い。Consider the 16×16 board with one square removed. The figure below is an example. Explain that no matter which square is removed, the board can be completely filled up by 4 types of plates below without overlapping. You may use the fact that 8×8 board can be filled up no matter which square is removed.





盤を四半分に区切る。ひとつひとつは、8×8 の大きさの盤である。そのうち、ひとつだけ、何処かが欠けている。その部分は、仮定から左の 4 タイプの板で敷き詰めることができる。この時、残りの三つにまたがるように、何れかの板をおくことができる（左図参照）。すると、残りの三つの四半分は、一箇所だけがすでに、敷き詰められており、8×8 で一箇所欠けている盤とみることができるので、仮定より、これらも左の板で敷き詰められる。従って、どこが一箇所欠けていても、左の 4 タイプの板で敷き詰めることが分かった。
Divide the board into four 8×8 boards. The removed square is located in one of the four smaller boards. Then put one of the four pieces at the center of the board so that it does not cover the one of the four a square is removed. Then we need to fill up the remaining three 8×8 squares. However, each board of size 8×8 can be regarded as a board of the size such that one square is removed. Now by hypothesis, all of the four boards can be filled by these pieces without overlapping. Therefore it is possible for all cases.

2. Figure 1 ようなハノイの塔のゲームを考える。Figures 2, 3 は A にあった 6 枚の円盤を B または C に最少手数で移動させている途中である。それぞれ、どこに移動する途中かと、次の移動と、最少手数ではあと何回の移動が必要かを答えよ。(Consider the Hanoi's Tower with 6 disks as in Figure 1. We are in the process of moving 6 disks from A to B or C with minimal number of steps. Answer the following in each case.) 適切なものに丸をし、下線に数を書き入れよ。(Encircle the appropriate choices and fill the number in blank.)

   (a) Figure 2. A:6,5,2 B:1 C:4,3

   移動先 (Destination)： B　C　次の移動 (Next move)：$1 \to$ A, $1 \to$ C, or $2 \to$ C.

   移動回数 (How many moves left?)：50 (2+1+15+1+31) 回

   (b) Figure 3. A:6,3,2,1, B:5,4, C:

   移動先 (Destination)： B　C　次の移動 (Next move)：$1 \to$ B, $1 \to$ C, or $4 \to$ C.

   移動回数 (How many moves left?)：39 (7+1+31) 回

Figure 1

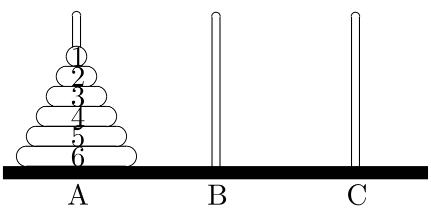


Figure 2

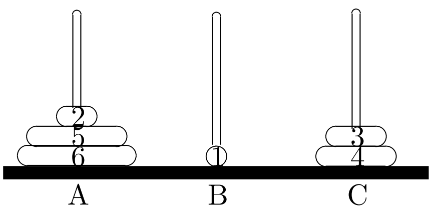
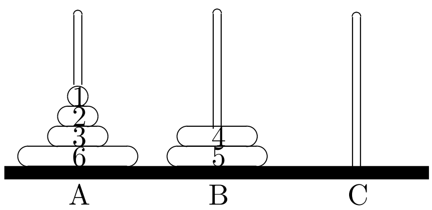


Figure 3



Quiz 4

ID#: **Name:**

A さんは 260 章ある新約聖書を 100 日間で読んだ。一日最低 1 章は読み、毎日読んだ章数を記録した。a_n を n 日目に読んだ章の数、b_n を n 日目までに読んだ章数とすると、$b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ となる。b_n を 100 で割った商を q_n、余りを r_n とすると、$b_n = 100q_n + r_n$ $(0 \leqq r_n \leqq 99)$ と書くことができる。Miss A read through all 260 chapters of the New Testament of the Bible in 100 days. She read at least one chapter a day, and recorded the number of chapters she read each day. Let a_n be the number of chapters she read on day n, and b_n the total number of chapters she read from day 1 to day n, i.e., $b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Let $b_n = 100q_n + r_n$ with $0 \leqq r_n \leqq 99$ for $n = 1, 2, \ldots, 100$, i.e., q_n is the quotient, r_n is the remainder when dividing b_n by 100. (e.g. If $b_{90} = 220$, then $220 = 100 \times 2 + 20$. In this case $n = 90$, $q_{90} = 2$ and $r_{90} = 20$.)

1. 次の文章が常に正しいときには True を丸で囲み、そうでないとき False を丸で囲め。If the statement is always true, encircle 'True', and encircle 'False' otherwise.
   (a) 丁度 2 章読んだ日がある。One day she read exactly 2 chapters. .... True / False
   (b) 丁度 3 章読んだ日がある。One day she read exactly 3 chapters. .... True / False
   (c) 丁度 1 章か 2 章読んだ日がある。One day she read exactly one or two chapters. .... True / False
   (d) 3 章以上読んだ日がある。One day she read at least 3 chapters. .... True / False
2. どの r_n も 0 でないならば、余りのどれか（たとえば r_i）と、他の余りのどれか（たとえば r_j）とは等しいことを説明せよ。どこで鳩の巣原理を用いたか明示すること。Suppose none of r_n is zero for $n = 1, 2, \ldots, 100$. Explain the fact that some r_i is equal to some other r_j. Clearly state when you use the pigeonhole principle.
3. 丁度 100 章読んだ期間か丁度 200 章読んだ期間があることを説明せよ。Explain that over some period she read exactly 100 chapters or 200 chapters.

Message 欄（裏にもどうぞ）：どんなおとなが魅力的ですか。こどもの魅力は何でしょう。What kind of adult is admirable? What is admirable about children?（「HP 掲載不可」は明記の事。If you don't want your message to be posted, write "Do Not Post."）

Solutions to Quiz 4

A さんは 260 章ある新約聖書を 100 日間で読んだ。一日最低 1 章は読み、毎日読んだ章数を記録した。a_n を n 日目に読んだ章の数、b_n を n 日目までに読んだ章数とすると、$b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ となる。b_n を 100 で割った商を q_n、余りを r_n とすると、$b_n = 100q_n + r_n$ $(0 \leqq r_n \leqq 99)$ と書くことができる。Miss A read through all 260 chapters of the New Testament of the Bible in 100 days. She read at least one chapter a day, and recorded the number of chapters she read each day. Let a_n be the number of chapters she read on day n, and b_n the total number of chapters she read from day 1 to day n, i.e., $b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Let $b_n = 100q_n + r_n$ with $0 \leqq r_n \leqq 99$ for $n = 1, 2, \ldots, 100$, i.e., q_n is the quotient, r_n is the remainder when dividing b_n by 100. (e.g. If $b_{90} = 220$, then $220 = 100 \times 2 + 20$. In this case $n = 90$, $q_{90} = 2$ and $r_{90} = 20$.)

1. 次の文章が常に正しいときには True を丸で囲み、そうでないとき False を丸で囲め。If the statement is always true, encircle ‘True’, and encircle ’False’ otherwise.
   (a) 丁度 2 章読んだ日がある。One day she read exactly 2 chapters. .... True / False
   (b) 丁度 3 章読んだ日がある。One day she read exactly 3 chapters. .... True / False
   (c) 丁度 1 章か 2 章読んだ日がある。One day she read exactly one or two chapters. .... True / False
   (d) 3 章以上読んだ日がある。One day she read at least 3 chapters. .... True / False

2. どの r_n も 0 でないならば、余りのどれか（たとえば r_i）と、他の余りのどれか（たとえば r_j）とは等しいことを説明せよ。どこで鳩の巣原理を用いたか明示すること。Suppose none of r_n is zero for $n = 1, 2, \ldots, 100$. Explain the fact that some r_i is equal to some other r_j. Clearly state when you use the pigeonhole principle.

   Soln. 一般に、$0 \leqq r_n \leqq 99$ であるが、いまどの r_n も 0 ではないので、すべて $1 \leqq r_n \leqq 99$ である。$r_1, r_2, \ldots, r_{100}$ がすべて 1 から 99 の どれかであるから、鳩の巣原理によって、この中に、同じ数がある。すなわち「余りのどれか（たとえば r_i）と、他の余りのどれか（たとえば r_j）とは等しい。」

   In general, $0 \leqq r_n \leqq 99$. But by our assumption, none of r_n equals 0. So $r_1, r_2, \ldots, r_{100}$ are between 1 and 99. By the pigeonhole principle, ‘some r_i must be equal to some other r_j’.

3. 丁度 100 章読んだ期間か丁度 200 章読んだ期間があることを説明せよ。Explain that over some period she read exactly 100 chapters or 200 chapters.

   Soln. 260 以下で 100 の倍数は、100 か 200 である。さて、もし r_n のうちのどれかが 0 だとすると、$b_n = 100q_n$ と書けているから、n 日目までの期間に 100 の倍数の章数を読んだことになるが、最初に書いたことから、この期間に 100 章か 200 章読んだことになる。もし、r_n のうちのどれも 0 でないとすると、前問から「余りのどれか（たとえば r_i）と、他の余りのどれか（たとえば r_j）とは等しい。」すると、$b_i = 100q_i + r_i$, $b_j = 100q_j + r_j$ で、$r_i = r_j$ となっている。$i < j$ とすると、$b_j - b_i = (100q_j + r_j) - (b_i = 100q_i + r_i) = 100(q_j - q_i)$ となる。一方、$b_j - b_i = (a_1 + a_2 + \cdots + a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j) + (a_1 + a_2 + \cdots + a_i) = a_{i+1} + \cdots + a_j$。したがって、$a_{i+1} + \cdots + a_j = 100(q_j - q_i)$。すなわち $i+1$ 日目から j 日目までに読んだ章の数が 100 の倍数となるが、最初の注意から、丁度 100 または 200 になる。

   If the number of chapters read over a period is divisible by 100, it has to be either 100 or 200 as the total number of chapters is 260. If some of r_n is zero, then $b_n = 100q_n$, and she read 100 or 200 chapters from day 1 to day n. If none of r_n is zero, by the previous problem, some r_i is equal to some other r_j. On one hand, $b_j - b_i = (100q_j + r_j) - (100q_i + r_i) = 100(q_j - q_i)$. On the other hand, $b_j - b_i$ is the total number of chapters she read from day $i+1$ to j, by our remark above, over some period, i.e., from day $i+1$ to day j, she read exactly 100 chapters or 200 chapters.

Quiz 5

ID#: **Name:**

数学の世界は今年 113 人が受講している。クラス内でメールアドレスの交換を行った。二人ずつお互いに交換するものとする。This year, 113 students enrolled in the World of Mathematics class. They exchaged mail addresses each other.

1. 全員が 5 人とメールアドレスの交換を行うことはあり得ないことを説明してください。Explain that it is impossible that everyone exhanged mail addresses with exactly five students.

2. 偶数人とメールアドレスの交換をした人は、奇数人いることを説明してください。Explain that there are an odd number of people who exhanged mail addresses with an even number of people.

3. 全員 112 人と交換をした人と、111 人と交換をした人が一人ずつはいることが分かっている。このとき、だれとも、丁度、一人と交換をした人は、いたとしても一人だけであることを説明してください。There is a student who exchenged mail addresses with all 112 students and a student who exchenged mail addresses with exactly 111 students. Explain that there is at most one student who exchanged a mail address with exactly one student.

Message 欄（裏にもどうぞ）： (1) 結婚について、家庭について、子供について。About marriage, family and children. (2) この授業について。要望・改善点など。About this course; requests and suggestions for improvement.（「HP 掲載不可」は明記の事。If you don't want your message to be posted, write "Do Not Post."）

Solutions to Quiz 5

数学の世界は今年 113 人が受講している。クラス内でメールアドレスの交換を行った。二人ずつお互いに交換するものとする。This year, 113 students enrolled in the World of Mathematics class. They exchaged mail addresses each other.

1. 全員が 5 人とメールアドレスの交換を行うことはあり得ないことを説明してください。Explain that it is impossible that everyone exhanged mail addresses with exactly five students.

2. 偶数人とメールアドレスの交換をした人は、奇数人いることを説明してください。Explain that there are an odd number of people who exhanged mail addresses with an even number of people.

3. 全員 112 人と交換をした人と、111 人と交換をした人が一人ずつはいることが分かっている。このとき、だれとも、丁度、一人と交換をした人は、いたとしても一人だけであることを説明してください。There is a student who exchenged mail addresses with all 112 students and a student who exchenged mail addresses with exactly 111 students. Explain that there is at most one student who exchanged a mail address with exactly one student.

Quiz 6

ID#: **Name:**

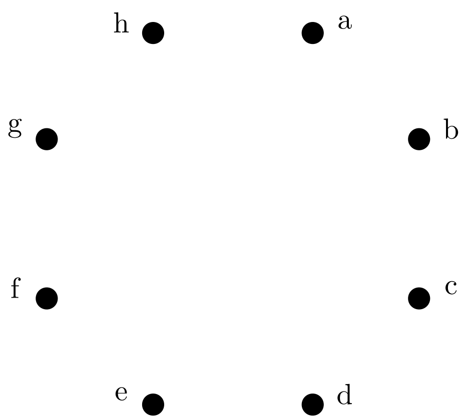
1. 頂点数が 8 で、そのうちの 3 頂点の次数が $4, 2, 2$ である木について次の問に答えよ。Consider trees with eight vertices such that the degrees of three of them are $4, 2, 2$.

   (a) 残りの 5 頂点の次数は $2, 1, 1, 1, 1$ であることを説明してください。Explain that the degrees of the remaining 5 vertices are $2, 1, 1, 1, 1$.

   (b) 条件を満たす（同型でない）木が 3 種類ある。これらを図示せよ。Depict three non-isomorphic trees satisfying the condition.

2. a, b, c, d, e, f, g, h を結ぶ（間接でも良い）ネットワークで費用最小のものを作りたい。それぞれの 2 点間を結ぶ費用が次のように与えられている時、その最小の費用はいくらか。そのネットワークも図示せよ。（単位は万円）Find the cheapest network connecting a, b, c, d, e, f, g, h using the cost table below. Draw the network and give its total cost. (1 unit = 10,000 JPY)

	h	g	f	e	d	c	b
a	1	4	3	2	7	5	4
b	4	5	4	4	5	3	
c	4	2	3	5	6		
d	6	7	6	6			
e	1	4	1				
f	1	4					
g	4						



合計 (Total)：

Message 欄（裏にもどうぞ）：国際人とは。ICU のそして自分の「国際性」にとって必要なこと。How do you define World Citizen? Your thought on Internationalism at ICU.（「HP 掲載不可」は明記の事。If you don't want your message to be posted, write "Do Not Post."）

Solutions to Quiz 6

1. 頂点数が 8 で、そのうちの 3 頂点の次数が $4, 2, 2$ である木について次の問に答えよ。Consider trees with eight vertices such that the degrees of three of them are $4, 2, 2$.

   (a) 残りの 5 頂点の次数は $2, 1, 1, 1, 1$ であることを説明してください。Explain that the degrees of the remaining 5 vertices are $2, 1, 1, 1, 1$.

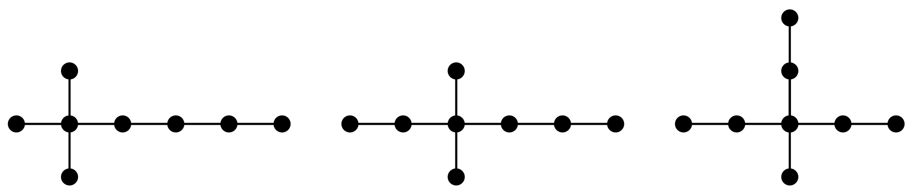
   Soln. 8 点上の木には、Theorem 6.2 によって辺が 7 本ある。Theorem 5.1 によって各頂点の次数の合計は、辺の数の二倍だから、この場合、次数の合計は $14 = 2 \times 7$ になる。いま、3 頂点の次数は 4, 2, 2, なので、和は 8 だから、残りの 5 頂点の次数の和は、$14 - 8 = 6$ でなければならない。連結だから各頂点の次数は 1 以上なので、残りの 5 頂点の次数は $2, 1, 1, 1, 1$ 以外にはあり得ない。

   By Theorem 6.2, the number of edges of a tree with 8 vertices is 7. So the total number of degrees of vertices is 14 by Theorem 5.1. Since 4, 2, 2 are the degrees of three vertices, the total number of degrees of the five remaining vertices is $14 - (4 + 2 + 2) = 6$. Thus $2, 1, 1, 1, 1$ is the only possibility.

   (b) 条件を満たす（同型でない）木が 3 種類ある。これらを図示せよ。Depict three non-isomorphic trees satisfying the condition.

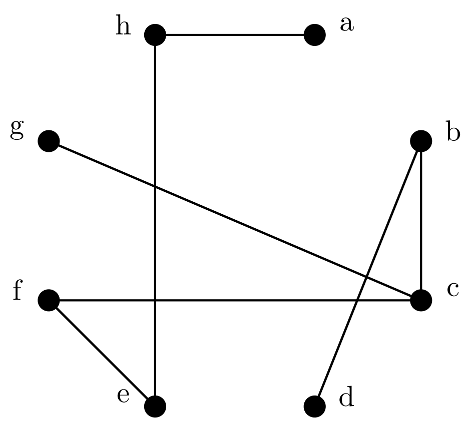
   Soln. 次数が 2 以上に繋がり方を考えると、以下の様になる。By considering the connection of vertices of degree at least 2, we have the following.

$$4 - 2 - 2 - 2, \quad 2 - 4 - 2 - 2, \quad \begin{array}{c} 2 \\ | \\ 2 - 4 - 2 \end{array}.$$



2. a, b, c, d, e, f, g, h を結ぶ（間接でも良い）ネットワークで費用最小のものを作りたい。それぞれの 2 点間を結ぶ費用が次のように与えられている時、その最小の費用はいくらか。そのネットワークも図示せよ。（単位は万円）Find the cheapest network connecting a, b, c, d, e, f, g, h using the cost table below. Draw the network and give its total cost. (1 unit = 10,000 JPY)

	h	g	f	e	d	c	b
a	1	4	3	2	7	5	4
b	4	5	4	4	5	3	
c	4	2	3	5	6		
d	6	7	6	6			
e	1	4	1				
f	1	4					
g	4						

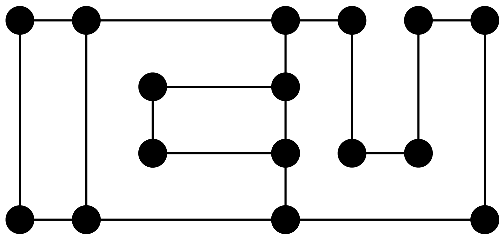


合計 (Total)： 16 万円 $\quad 16 = 1 + 1 + 1 + +2 + 3 + 3 + 5$

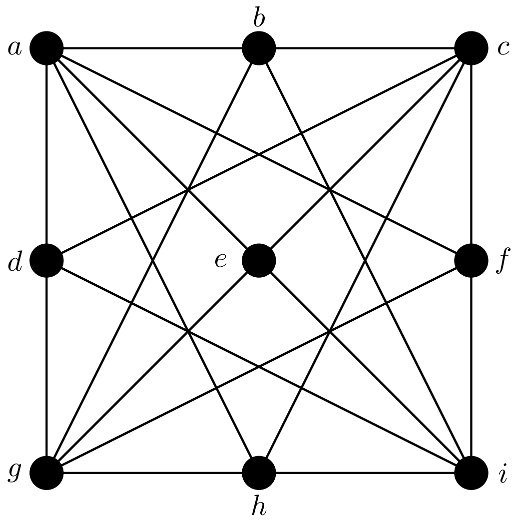
Quiz 7

ID#: **Name:**

1. 下のグラフには一筆書きはできないこと（すなわち、オイラー路は存在しないこと）をこのクラスを受講していない ICU 生にわかるように説明して下さい。Explain that the following graph can not be drawn in one stroke, i.e., there is no Eulerian path, so that ICU students who are not taking this course may understand.



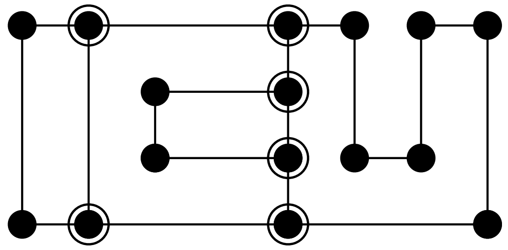
2. 下のグラフはハミルトングラフではないことを、Theorem 7.3 を用いて説明せよ。S, Δ, $\omega(\Delta)$ が何であるかも明示し、ハミルトングラフではない理由を明記すること。Show that the graph below is not Hamiltonian by applying Theorem 7.3. Describe S, Δ, and $\omega(\Delta)$.



Message 欄（裏にもどうぞ）: 聖書を読んだことがありますか。キリスト教について、ICU の「C」について。Have you read the Bible? Any comments on Christianity and “C” of ICU.（「HP 掲載不可」は明記の事。If you don’t want your message to be posted, write “Do Not Post.”）

Solutions to Quiz 7

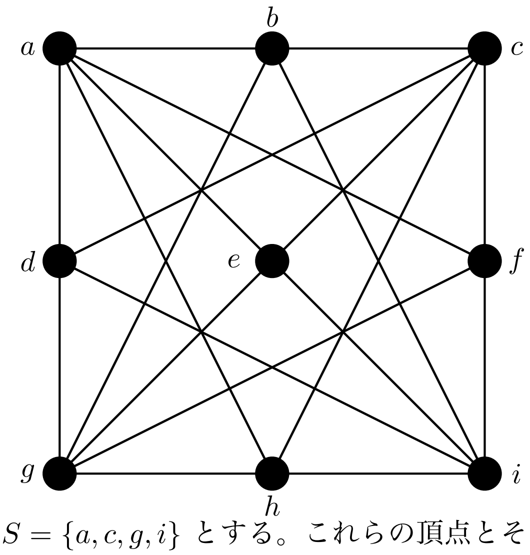
1. 下のグラフには一筆書きはできないこと（すなわち、オイラー路は存在しないこと）をこのクラスを受講していない ICU 生にわかるように説明して下さい。Explain that the following graph can not be drawn in one stroke, i.e., there is no Eulerian path, so that ICU students who are not taking this course may understand.

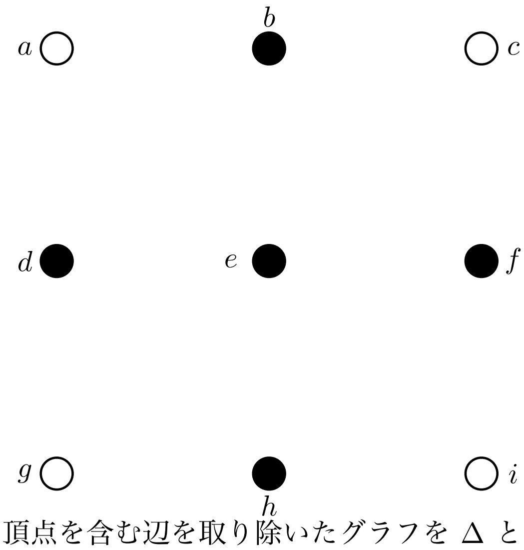


Soln. オイラー路は、各辺（線）を丁度一回ずつ通る路なので、オイラー路があるかという問題は、このグラフが一筆書きできるかという問題と同じです。一筆書きできたとすると、各頂点（黒丸）を通る毎に、そこに到達する前に通る辺（線）と出て行くときに通る辺（線）二つずつ辺（線）を通るので、各頂点（黒丸）から出ている辺（線）の数（次数という）はスタート地点とゴール地点を除いて偶数でなければなりません。つまり奇数本の辺（線）が出ている頂点（黒丸）は（スタートとゴールだけは別で、それは同じかも知れないので）２個以下でなければなりません。このグラフは丸をつけた 6 頂点（黒丸）から出ている辺（線）の数が 3 で奇数だから、不可能です。従って、一筆書きはできません。

A Eulerian path is a route on the figure which visits every edge (line segment) exactly once, so it can be thought of a figure that can be drawn in one stroke. Every path uses two edges when it passes each vertex. If there is a route that visits every edge exactly once, the degree of each vertex, i.e., the number of edges going out from it, has to be even except the starting and finishing vertices. However, there are three edges going out from 6 encircled vertices, this is not the case. Thus this graph cannot be drawn in one stroke.

2. 下のグラフはハミルトングラフではないことを、Theorem 7.3 を用いて説明せよ。S, Δ, $\omega(\Delta)$ が何であるかも明示し、ハミルトングラフではない理由を明記すること。Show that the graph below is not Hamiltonian by applying Theorem 7.3. Describe S, Δ, and $\omega(\Delta)$.





$S = \{a, c, g, i\}$ とする。これらの頂点とその頂点を含む辺を取り除いたグラフを Δ とすると、それは、右上のグラフになる。この連結成分の数は、5 だから $\omega(\Delta) = 5$. ハミルトングラフなら、定理 7.3 より $5 = \omega(\Delta) \leqq |S| = 4$ とならなければならないが、これは、矛盾である。ここで $|S|$ は、S に含まれる要素の数を表します。 ■

Set $S = \{a, c, g, i\}$. Let Δ be the graph obtained by deleting S, which is depicted on the right of the original graph. Then the number of connected components of Δ is four. By Theorem 7.3, if the graph is Hamiltonian, $5 = \omega(\Delta) \leqq |S| = 4$. This is a contradiction. Thus, the graph is not Hamiltonian. Here $|S|$ denotes the number of elements in S. ■

Quiz 8

ID#: **Name:**

1. 二部グラフとはどんなグラフであるかを記し、また、二部グラフの閉路の長さは常に偶数であることを説明して下さい。What is a bipartite graph? Explain that the length of a closed path (circuit) in a bipartite graph is always even.

2. 平面的二部グラフには、次数が 3 以下の頂点がかならずあることを示したい。定理を利用するときは、その主張または、ハンドアウトにおける定理の番号を必ず書いてください。In the following we want to show that every bipartite planar graph has a vertex of degree at most three. When you apply a result, please quote the statement or its number in the handout.

   (a) 辺の本数を e, 頂点数を v とし、すべての頂点の次数が 4 以上ならば、$e \geqq 2v$ となることを説明して下さい。Let e be the number of edges and v the number of vertices. Explain that if the degree of every vertex is at least four, then $e \geqq 2v$.

   (b) 二部グラフを平面グラフに描いたときの面の数を f とすると、$e \geqq 2f$ であることを説明して下さい。Let f be the number of faces when a bipartite graph is drawn as a plane graph. Explain that $e \geqq 2f$.

   (c) 最初の主張が成立することを説明して下さい。Explain that the first assertion holds.

Message 欄（裏にもどうぞ）：(1) 日本・世界の教育について。About education in Japan and in the world. (2) ICU の教育について。特に改善点について。About education of ICU, and its improvements.（「HP 掲載不可」は明記の事。If you don't want your message to be posted, write "Do Not Post."）

Solutions to Quiz 8

1. 二部グラフとはどんなグラフであるかを記し、また、二部グラフの閉路の長さは常に偶数であることを説明して下さい。What is a bipartite graph? Explain that the length of a closed path (circuit) in a bipartite graph is always even.

   Soln. 二部グラフとは、頂点を二つのグループ A と B に分け、A 同志、B 同志は隣接していないようにできるグラフのことである。閉路があったとすると、A の頂点同志、B の頂点同志は隣接していないから、隣接した頂点が連続している路においては、A の頂点の次は、B の頂点、B の頂点の次は A の頂点になる。したがって、閉路では、A の頂点を起点とすると、偶数番目に A の頂点となるので、最後に起点の A の頂点に戻る閉路の場合は、長さが偶数になる。

   A bipartite graph is a graph whose vertex set can be partitioned into two parts, say A and B, so that no vertices among A are adjacent and no vertices among B are adjacent. If there is a closed path, starting from a vertex in A, the next vertex is in B as it is adjacent to the first vertex, the next vertex is in A, and the next in B. So the 0th, 2nd, 4th, 6th, ... vertices are in A. Hence the length of a closed path is even.

2. 平面的二部グラフには、次数が 3 以下の頂点がかならずあることを示したい。定理を利用するときは、その主張または、ハンドアウトにおける定理の番号を必ず書いてください。In the following we want to show that every bipartite planar graph has a vertex of degree at most three. When you apply a result, please quote the statement or its number in the handout.

   (a) 辺の本数を e, 頂点数を v とし、すべての頂点の次数が 4 以上ならば、$e \geqq 2v$ となることを説明して下さい。Let e be the number of edges and v the number of vertices. Explain that if the degree of every vertex is at least four, then $e \geqq 2v$.
   Soln. 頂点を $x_1, x_2, \ldots, x_v$ とすると仮定から次数はすべて 4 以上なので握手の定理 (Theorem 5.1) より、次の式が得られる。Let $x_1, x_2, \ldots, x_v$ be vertices. Then by assumption, $\deg(x_1) \geqq 4$, $\deg(x_2) \geqq 4$, $\ldots, \deg(x_v) \geqq 4$. By Proposition 8.2 (i) or Theorem 5.1,

   $$2e = \deg(x_1) + \deg(x_2) + \cdots + \deg(x_v) \geqq \overbrace{4 + 4 + \cdots + 4}^{v \text{ terms}} = 4v.$$

   Therefore $e \geqq 2v$. 上の式より、$e \geqq 2v$ を得る。

   (b) 二部グラフを平面グラフに描いたときの面の数を f とすると、$e \geqq 2f$ であることを説明して下さい。Let f be the number of faces when a bipartite graph is drawn as a plane graph. Explain that $e \geqq 2f$.
   Soln. $F_1, F_2, \ldots, F_f$ を面、その面を囲む辺のかずをそれぞれ $n_1, n_2, \ldots, n_f$ とすると、閉路の長さは 3 以上で、かつ、問 1 より、長さは偶数だから、すべて 4 以上となる。したがって次の式を得る。Let $F_1, F_2, \ldots, F_f$ be faces. Let n_i be the number of edges surrounding F_i $(i = 1, 2, \ldots, f)$. Then by 1, $n_1 \geqq 4$, $n_2 \geqq 4$, $\ldots, n_f \geqq 4$. By Proposition 8.2 (ii),

   $$2e = n_1 + n_2 + \cdots + n_f \geqq \overbrace{4 + 4 + \cdots + 4}^{f \text{ terms}} = 4f.$$

   Therefore $e \geqq 2f$. これより、$e \geqq 2f$ を得る。

   (c) 最初の主張が成立することを説明して下さい。Explain that the first assertion holds.
   Soln. 背理法で示す。すべての頂点の次数が 4 以上だとすると、(a) より、$e \geqq 2v$。また (b) より $e \geqq 2f$ となる。オイラーの公式 (Theorem 8,1) を用いると By way of contradiction, assume that the degree of every vertex is at least four. Then by (a), $e \geqq 2v$, and by (b), $e \geqq 2f$. Hence by Euler's formula,

   $$2 = v - e + f \leqq \frac{1}{2}e - e + \frac{1}{2}e = 0.$$

   これは、矛盾であるので、ある頂点の次数は 3 以下である。This is a contradiction, and the assertion holds.