Final Exam of NSIB 2002/3

各解答用紙に ID と名前を書いて下さい。問題番号の明記を忘れずに。

I. 正しいものには ◯、誤っているものには × を解答欄に記入せよ。 (2pts×5)

1. 論理演算に関して常に次の式が成り立つ。
$$\neg((p \vee q) \wedge (\neg r)) = ((\neg p) \vee r) \wedge ((\neg q) \vee r)$$

2. A を $n \times n$ の正方行列とする。行列方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{x}$ が無限に存在すれば他の $\boldsymbol{b}$ について $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ となる解 $\boldsymbol{x}$ がただ一つということはない。

3. A, B をともに $m \times n$ 行列でかつ、行列 B は 行列 A に行に関する基本変形を何回か施して得られるものとする。このとき、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ は常に $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解である。

4. 関数 $f(x)$ において、$f'(c) = f''(c) = f'''(c) = 0$ かつ $f''''(c) = 7$ ならば $f(x)$ は $x = c$ で極小となる。

5. $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であれば、$2x \cdot f(x)$ の原始関数は $x^2 \cdot F(x)$ である。

II. 次の問いに答えよ。 (5pts×14)

1. $((\neg p) \vee r) \wedge ((\neg q) \vee r)$ の真理表を作れ。

2. 次の条件をみたす 3×3 行列 T を一つ書け。
$$T \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a+c \\ 2a+b \\ a \end{bmatrix}$$

3. A, B を下のような行列とすとき、積 AB および BA を求めよ。
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. 前問の A は可逆かどうか（逆行列をもつかどうか）判定せよ。

5. 次の行列を連立一次方程式の拡大係数行列だとするとき、既約ガウス行列に変形し、解 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ を求めよ。
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -6 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

6. 多項式 $f(x)$ は $f(1)=1, f(2)=-3, f(3)=2, f(4)=-5$ を満たす。また、$f_n=f(n), n=1,2,3,\ldots,$ とすると、$\Delta^4 f_n=0$ を満たすとする。このとき、$f(x)$ および f_5 を求めよ。ただし、数列 $\{g_n\}$ にたいし、$\{\Delta g_n\}$ は $\Delta g_n = g_{n+1}-g_n$ によって定義される新しい数列で Δ^4 はこのような操作を $\{f_n\}$ に 4 回繰り返したものをあらわすとする。

7. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^4-x^3-x+1}$ を求めよ。

8. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x}$ を求めよ。ただし、$e^0=1$ である。

9. $\displaystyle\frac{1}{(x^3+8)^3}$ の導関数を求めよ。

10. $(x^2+1)e^{-x^2-1}$ の導関数を求めよ。

11. $\displaystyle\int\left(x^3+1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$ を求めよ。

12. $\displaystyle\int\frac{x^2}{(x^3+8)^4}dx$ を求めよ。

13. $\displaystyle\int_0^1(2x-1)^5dx$ を求めよ。

14. $\displaystyle F(x)=\int_1^x(t^2+1)e^{-t^2-1}dt$ の導関数を求めよ。

III. 下のそれぞれの問題に解答せよ。 (10pts×2)

1. 下の行列 C の逆行列を求めよ。またその逆行列をもちいて、右下の連立一次方程式の解を求めよ。

$$C=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -3 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 1 & -2 & 4 & -1\\ 0 & 2 & -4 & 1\end{bmatrix},\quad \left\{\begin{array}{rrrrcr}-x_1 & +2x_2 & -3x_3 & +x_4 & = & 1\\ & x_2 & -2x_3 & & = & 0\\ x_1 & -2x_2 & +4x_3 & -x_4 & = & 0\\ & 2x_2 & -4x_3 & +x_4 & = & -1\end{array}\right.$$

2. $f(x)$ を $f'(x)=x(x+1)^3(x-2)=x^5+x^4-3x^3-5x^2-2x$ かつ $f(0)=-2$ を満たす関数とする。このとき、

   (a) $x=-1,0,2$ におて $f(x)$ が極大か、極小か、増加しているか、減少しているかを決定せよ。

   (b) $f(x)$ の最小値および最小値をとるときの x の値を求めよ。

メッセージ： 以下のことについて余白または解答用紙の裏に書いて下さい。

(A) この授業について。特に改善点について。

(B) ICU の教育一般について。特に改善点について。

NSIB FINAL 2002/3 解答用紙

Division: **ID#:** **Name:**

I.

1.	2.	3.	4.	5.

II. 1.

p	q	r	$((\neg p)$ $\vee$ $r)$ $\wedge$ $((\neg q)$ $\vee$ $r)$
T	T	T	
T	T	F	
T	F	T	
T	F	F	
F	T	T	
F	T	F	
F	F	T	
F	F	F	

2.

NSIB FINAL 2002/3 Solutions

I.

1. ◯	2. ◯	3. ×	4. ◯	5. ×

解説： 1 は II-1 参照。2. 無限個ということは、係数行列の部分の階数を考えると $n-1$ 以下ですから、解が一つということはありません。3. $B = TA$ とすると、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ から $B\boldsymbol{x} = TA\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{b}$ とはなりますが、$B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ とは一般にはなりません。反例をしめさないと厳密には答えになっていませんがそれは考えて下さい。簡単に例が作れるはずです。4. 実はこれが III-2 の $x = -1$ のところで起こるケースになっています。この場合は極小です。値はちょっと違いますが。5. これが間違いであることは、例えば $F(x) = x$ とすればすぐわかりますね。この場合は $f(x) = 1$ です。

II.

1. $((\neg p) \vee r) \wedge ((\neg q) \vee r)$ の真理表を作れ。

   右の式の値から I-1 が正しいことがわかる。

p	q	r	$((\neg p)$	$\vee$	$r)$	$\wedge$	$((\neg q)$	$\vee$	$r)$	$\neg$	$((p \vee q)$	$\wedge$	$(\neg r))$
T	T	T	F	T	T	**T**	F	T	T	**T**	T	F	F
T	T	F	F	F	F	**F**	F	F	F	**F**	T	T	T
T	F	T	F	T	T	**T**	T	T	T	**T**	T	F	F
T	F	F	F	F	F	**F**	T	T	F	**F**	T	T	T
F	T	T	T	T	T	**T**	F	T	T	**T**	T	F	F
F	T	F	T	T	F	**F**	F	F	F	**F**	T	T	T
F	F	T	T	T	T	**T**	T	T	T	**T**	F	F	F
F	F	F	T	T	F	**T**	T	T	F	**T**	F	F	T

2. 次の条件をみたす 3×3 行列 T を一つ書け。

$$T \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a+c \\ 2a+b \\ a \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   次のように求めるのが一つの方法です。なぜこれで求まるかわかりますか。逆両列を求めた時のことを考えてみて下さい。

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -a+c & -1 & 0 & 1 \\ 2a+b & 2 & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. 積 AB および BA を求めよ。

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+4+4 & 3+2-2 & 1-8-4 \\ 0+2+2 & 6+1-1 & 2-4-2 \\ 0+4+4 & -6+2-2 & -2-8-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & -11 \\ 4 & 6 & -4 \\ 8 & -6 & -14 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+6-2 & 0+3+2 & 0-3-2 \\ 2+2+8 & 4+1-8 & -4-1+8 \\ -2+2-4 & -4+1+4 & 4-1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -5 \\ 12 & -3 & 3 \\ -4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

4. 前問の A は可逆かどうか（逆行列をもつかどうか）判定せよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

行に関する基本変形で得られた既約ガウス行列が単位行列 I ではないから、可逆ではない。

5. 次の行列を連立一次方程式の拡大係数行列だとするとき、既約ガウス行列に変形し、解 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ を求めよ。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -6 & 3 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -6 & 3 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -6 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -3 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s+3t-8 \\ s \\ -2t+u+1 \\ -2t+u-5 \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. 多項式 $f(x)$ は $f(1)=1, f(2)=-3, f(3)=2, f(4)=-5$ を満たす。また、$f_n=f(n), n=1,2,3,\ldots,$ とすると、$\Delta^4 f_n=0$ を満たすとする。このとき、$f(x)$ および f_5 を求めよ。ただし、数列 $\{g_n\}$ にたいし、$\{\Delta g_n\}$ は $\Delta g_n=g_{n+1}-g_n$ によって定義される新しい数列で Δ^4 はこのような操作を $\{f_n\}$ に 4 回繰り返したものをあらわすとする。

解： 多項式は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} - 3\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} + 2\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} \\
&\quad - 5\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} \\
&= -\frac{1}{6}(x-2)(x-3)(x-4) - \frac{3}{2}(x-1)(x-3)(x-4) - (x-1)(x-2)(x-4) \\
&\quad - \frac{5}{6}(x-1)(x-2)(x-3) \\
&= -\frac{7}{2}x^3 + \frac{51}{2}x^2 - 56x + 35,\ f(5) = -45.
\end{aligned}
$$

$g_n=\Delta f_n=f_{n+1}-f_n$ とおくと、$g_1=-4,\ g_2=5,\ g_3=-7$ となります。さらに、$h_n=\Delta^2 f_n=\Delta g_n=g_{n+1}-g_n$ とおくと、$h_1=9,\ h_2=-12$ となります。$i_h=\Delta^3 f_n=\Delta h_n$ は $i_1=-21$。$0=\Delta^4 f_n=\Delta i_n=i_{n+1}-i_n$ をつかうと、$i_1=i_2=i_3=\cdots=-21$ がわかります。これは、h_n が等差数列で公差が -21 であることを意味しています。これより $h_n=9-21(n-1)=30-21n$。さらに、

$$
\begin{aligned}
g_n &= (g_n-g_{n-1})+(g_{n-1}-g_{n-2})+\cdots+(g_2-g_1)+g_1 \\
&= h_{n-1}+h_{n-2}+\cdots+h_2+h_1+g_1 \\
&= -4+\sum_{j=1}^{n-1} 30-21j \ = \ -4+30(n-1)-21\frac{n(n-1)}{2} \\
&= -\frac{21}{2}n^2+\frac{81}{2}n-34
\end{aligned}
$$

これから同じようにして

$$
\begin{aligned}
f_n &= (f_n-f_{n-1})+(f_{n-1}-f_{n-2})+\cdots+(f_2-f_1)+f_1 \\
&= g_{n-1}+g_{n-2}+\cdots+g_2+g_1+f_1 \\
&= 1+\sum_{j=1}^{n-1}\left(-\frac{21}{2}j^2+\frac{81}{2}j-34\right) \\
&= 1-\frac{21}{2}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}+\frac{81}{2}\frac{n(n-1)}{2}-34(n-1) \\
&= -\frac{7}{2}n^3+\frac{51}{2}n^2-56n+35
\end{aligned}
$$

これはあまりにも大変ですね。定理をもちいて、$\Delta^4 f_n=0$ ならば $f(x)$ が 3 次の多項式であることがわかれば、あとは簡単です。

7. $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^4-x^3-x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+3)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x^2+x+1}=\frac{4}{3}$

別解： 微分を使います。

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^4-x^3-x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2x-5}{4x^3-3x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{6x+2}{12x^2-6x}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

最初の式では、極限を考えると 0/0 の形になっています。この場合は分母・分子を微分しても同じ極限になります。２番目の式は分母・分子を微分した式ですが、これもまた 0/0 になっています。そこでもう一度微分すると、３番目の式が得られます。分母の極限は 0 ではありませんから、そのまま極限が計算できます。（３番目の式は、0/0 の形ではありませんから、微分してはいけません。微分をすると全く違う答えになってしまいます。小テスト７の前の時間だったでしょうか、説明しましたが覚えていますか。Sample Exam for Review にはこれを使わないとできない問題が含まれていました。）

8. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x}=\frac{1-1}{1}=0$

   これは、間違って微分などしてはいけません。とても単純な問題でした。

9. $\displaystyle\frac{1}{(x^3+8)^3}$ の導関数を求めよ。

   解： 合成関数の微分を使います。

$$\left(\frac{1}{(x^3+8)^3}\right)'=((x^3+8)^{-3})'=-3(x^3+8)^{-4}(x^3+8)'=-3(x^3+8)^{-4}(3x^2)=\frac{-9x^2}{(x^3+8)^4}$$

   別解： 関数の商（分数の形）の微分を用いることもできます。しかしその場合でも $(x^3+8)^3$ の微分は必要ですから、合成関数の微分を用いなくてはいけません。もちろんこれを展開してしまい、それをさけることもできますが。1 の微分は 0 であることに注意してください。

$$\left(\frac{1}{(x^3+8)^3}\right)'=\frac{1'(x^3+8)^3-1\cdot(x^3+8)^{3\prime}}{((x^3+8)^3)^2}=\frac{-3(x^3+8)^2(3x^2)}{(x^3+8)^6}=\frac{-9x^2}{(x^3+8)^4}$$

10. $(x^2+1)e^{-x^2-1}$ の導関数を求めよ。

   解： 関数の積の微分を使います。

$$((x^2+1)e^{-x^2-1})'=(x^2+1)'e^{-x^2-1}+(x^2+1)(e^{-x^2-1})'=2xe^{-x^2-1}+(x^2+1)e^{-x^2-1}(-2x)=-2x^3e^{-x^2-1}$$

11. $\displaystyle\int\left(x^3+1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$ を求めよ。

   解： $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=x^{-1/3}$ に注意します。

$$\int\left(x^3+1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx=\frac{1}{4}x^4+x+\frac{1}{-\frac{1}{3}+1}x^{-\frac{1}{3}+1}+C=\frac{x^4}{4}+x+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+C$$

12. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^3+8)^4}dx$ を求めよ。

解： II-9 に注意します。

$$\int \frac{x^2}{(x^3+8)^4}dx = -\frac{1}{9}\int \frac{-9x^2}{(x^3+8)^4}dx = -\frac{1}{9}\frac{1}{(x^3+8)^3} + C = -\frac{1}{9(x^3+8)^3} + C$$

13. $\displaystyle\int_0^1 (2x-1)^5 dx$ を求めよ。

解： $(2x-1)^6$ の導関数はこれも合成関数の微分を用いると $((2x-1)^6)' = 6(2x-1)^5(2x-1)' = 12(2x-1)^5$ ですから、

$$\int_0^1 (2x-1)^5 = \frac{1}{12}\int_0^1 12(2x-1)^5 = \frac{1}{12}\left[(2x-1)^6\right]_0^1 = \frac{1}{12}(1^6-(-1)^6) = 0$$

14. $F(x) = \displaystyle\int_1^x (t^2+1)e^{-t^2-1}dt$ の導関数を求めよ。

解： 微分積分学の基本定理を考えると、$F(x)$ は $(x^2+1)e^{-x^2-1}$ の原始関数の一つですから、微分するともとの関数になります。

$$F'(x) = \left(\int_1^x (t^2+1)e^{-t^2-1}dt\right)' = (x^2+1)e^{-x^2-1}$$

III.

1. 下の行列 C の逆行列を求めよ。またその逆行列をもちいて、右下の連立一次方程式の解を求めよ。

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} -x_1 & +2x_2 & -3x_3 & +x_4 & = & 1 \\ & x_2 & -2x_3 & & = & 0 \\ x_1 & -2x_2 & +4x_3 & -x_4 & = & 0 \\ & 2x_2 & -4x_3 & +x_4 & = & -1 \end{cases}$$

解： まずは $[C, I]$ の形の行列を既約ガウス行列に変形します。

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = C^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

連立一次方程式の係数行列が C であることに注意すると、上の計算から、$x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$. となる。

2. $f(x)$ を $f'(x) = x(x+1)^3(x-2) = x^5 + x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 2x$ かつ $f(0) = -2$ を満たす関数とする。このとき、

   (a) $x = -1, 0, 2$ におて $f(x)$ が極大か、極小か、増加しているか、減少しているかを決定せよ。

   (b) $f(x)$ の最小値および最小値をとるときの x の値を求めよ。

解： $f'(x)$ の原始関数の一つが $f(x)$ だから

$$f(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 - x^2 + C$$

$f(0) = -2$ であることより $C = -2$ を得、

$$f(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 - x^2 - 2,\ f(-1) = -\frac{127}{60},\ f(2) = -\frac{214}{15}$$

次に二次導関数などを計算すると、

$$\begin{aligned} f''(x) &= 5x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 10x - 2,\ f''(-1) = 0,\ f''(0) = -2,\ f''(2) = 54, \\ f'''(x) &= 20x^3 + 12x^2 - 18x - 10,\ f'''(-1) = 0, \\ f''''(x) &= 60x^2 + 24x - 18,\ f''''(-1) = 18. \end{aligned}$$

$f'(x) = x(x+1)^3(x-2) = 0$ となるのは、$x = -1, 0, 2$ のいずれか。さらに、$f''(0) = -2 < 0$ なので $f(x)$ は $x = 0$ で極大。$f''(2) = 54 > 0$ より $f(x)$ は $x = 2$ で極小となる。$x = -1$ ではさらに議論が必要だが、下のようになり、$x = -1$ でも極小。$f(-1) > f(2)$ ですから、$f(x)$ が最小となるのは、$x = 2$ のときで、最小値は $-\frac{214}{15}$ となります。最大値はありません。いくらでも大きくなります。

しかし、そのことは聞いていません。

x		-1			0			2	
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$\searrow$	極小	$\nearrow$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$			$\nearrow$	
$f''(x)$	$+$	0	$+$		-2			54	
	$\searrow$		$\nearrow$						
$f'''(x)$	$-$	0	$+$						
		$\nearrow$							
$f''''(x)$		18							