Final Exam of NSIB 2003

各解答用紙に ID と名前を書いて下さい。問題番号の明記を忘れずに。

以下において、$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数、$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数、$f'''(x)$ は $f''(x)$ の 導関数、$f''''(x)$ は $f'''(x)$ の導関数を表すものとする。

I. 正しいものには ◯、誤っているものには × を解答欄に記入せよ。 (2pts×5)

1. 論理演算に関して常に次の式が成り立つ。

$$(p \vee q) \wedge r = p \vee (q \wedge r)$$

2. A を サイズが $n \times n$ の正方行列とする。行列方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ だけであれば、他の $\boldsymbol{b}$ についても $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ となる解 $\boldsymbol{x}$ は常にただ一つである。

3. A, B にそれぞれ逆行列 C, D が存在すれば、AB の逆行列は、CD である。

4. 関数 $f(x)$ において、$f'(c) = f''(c) = 0$ かつ $f'''(c) = 3$ ならば $f(x)$ は $x = c$ で極小となる。

5. $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であれば、$2x \cdot f(x)$ の原始関数は $F(x^2)$ である。

II. 次の問いに答えよ。 (5pts×13)

1. $((p \vee q) \wedge r) \Rightarrow (p \vee (q \wedge r))$ の真理表を作れ。

2. 次の条件をみたす 3×3 行列 T を一つ書け。

$$T \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b - 2c \\ a \\ -c \end{bmatrix}$$

また、行列 T を左からかけることはどのような行に関する変形を施したことと同じか。$[i; c]$ (i 行を c 倍), $[i, j]$ (i 行と j 行の入れ換え), $[i, j; c]$ (i 行に j 行の c 倍を加える) を用いて表せ。これらの基本変形を何回か使う場合は、どの順で施すかも明確に記せ。

3. A, B を下のような行列とすとき、A の逆行列 A^{-1} および 積 BA を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. 次の行列をある連立一次方程式の拡大係数行列だとするとき、既約ガウス行列に変形し、解 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ を求めよ。

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 1 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -8 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

5. 3 次の多項式 $Q(x)$ で、$Q(-1)=1,\ Q(0)=Q(1)=Q(2)=0$ を満たすものを求めよ。また、同じく 3 次の多項式 $f(x)$ で、$f(-1)=2,\ f(0)=-1,\ f(1)=3,\ f(2)=-6$ となるものを求めよ。

6. $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{x^3+8}$ を求めよ。

7. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1+x}{3x^2}$ を求めよ。ただし、$e^0=1$ である。

8. $(2x^3+5)^{10}$ の導関数を求めよ。

9. $(2x+1)e^{-x^3}$ の導関数を求めよ。

10. $\displaystyle\int\left(6x^2+1+\frac{4}{x^5}\right)dx$ を求めよ。

11. $\displaystyle\int x^2(2x^3+5)^9dx$ を求めよ。

12. $\displaystyle\int_0^1(3x+2)^4dx$ を求めよ。

13. $\displaystyle F(x)=\int_{-2}^{x}(2t+1)e^{-t^3}dt$ の導関数を求めよ。

III. 下のそれぞれの問題に解答せよ。 (10pts×2)

1. 左下の行列 C の逆行列を、右下の行列に行に関する基本変形を行なうことにより求めよ。求める過程も書くこと。 (10pts)

$$C=\begin{bmatrix}1&0&0&2\\2&0&1&4\\0&-1&-1&4\\0&1&1&-3\end{bmatrix},\quad [C,I]=\begin{bmatrix}1&0&0&2&1&0&0&0\\2&0&1&4&0&1&0&0\\0&-1&-1&4&0&0&1&0\\0&1&1&-3&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

2. $f(x)=2x^4-3x^3-x^2-3x+3=a_4(x-2)^4+a_3(x-2)^3+a_2(x-2)^2+a_1(x-2)+a_0$ とする。(15pts)

   (a) a_0,a_1,a_2,a_3,a_4 を求めよ。

   (b) $f(2),\ f'(2),\ f''(2),\ f'''(2),\ f''''(2)$ を求めよ。

   (c) $g(2)=1,\ g'(2)=1,\ g''(2)=2,\ g'''(2)=6,\ g''''(2)=24$ となる 4 次の多項式を求めよ。

メッセージ： 以下のことについて余白または解答用紙の裏に書いて下さい。

(A) この授業について。特に改善点について。

(B) ICU の教育一般について。特に改善点について。

NSIB FINAL 2003 解答用紙

Division: **ID#:** **Name:**

I.

1.	2.	3.	4.	5.

II. 1.

p	q	r	$((p \quad \vee \quad q) \quad \wedge \quad r) \quad \Rightarrow \quad (p \quad \vee \quad (q \quad \wedge \quad r))$
T	T	T	
T	T	F	
T	F	T	
T	F	F	
F	T	T	
F	T	F	
F	F	T	
F	F	F	

2.

NSIB FINAL 2003 Solutions

I.

1. ×	2. ◯	3. ×	4. ×	5. ×

II.

1.

p	q	r	$((p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$r)$	$\Rightarrow$	$(p$	$\vee$	$(q$	$\wedge$	$r))$
T	T	T	T	T	T	T	T	**T**	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	F	**T**	T	T	T	F	F
T	F	T	T	T	F	T	T	**T**	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	F	F	F	**T**	T	T	F	F	F
F	T	T	F	T	T	T	T	**T**	F	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	F	F	**T**	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	F	T	**T**	F	F	F	F	T
F	F	F	F	F	F	F	F	**T**	F	F	F	F	F

2.

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{ccccc} [1,2] & \to & [3;-1] & \to & [1,3;2] \\ [1,2] & \to & [1,3;-2] & \to & [3,-1],\ \text{or} \\ [3;-1] & \to & [1,2] & \to & [1,3;2],\ \text{etc.} \end{array}$$

3.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -7 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

4.

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 7 \\ 3 & -3 & 0 & 1 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -22 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-5t+2 \\ s \\ 2t+7 \\ 22t+1 \\ t \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 22 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5.

$$\begin{aligned}
Q(x) &= \frac{x(x-1)(x-2)}{(-1)(-1-1)(-1-2)} = -\frac{1}{6}x(x-1)(x-2) = -\frac{1}{6}(x^3-3x^2+2x) \\
f(x) &= 2\cdot\frac{x(x-1)(x-2)}{(-1)(-1-1)(-1-2)} - 1\cdot\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} \\
&\quad +3\cdot\frac{(x+1)x(x-2)}{(1+1)(1)(1-2)} - 6\cdot\frac{(x+1)x(x-1)}{(2+1)(2)(2-1)} \\
&= -\frac{1}{3}x(x-1)(x-2) - \frac{1}{2}(x+1)(x-1)(x-2) - \frac{3}{2}(x+1)x(x-2) - (x+1)x(x-1) \\
&= -\frac{10}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + \frac{23}{6}x - 1.
\end{aligned}$$

6.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{x^3+8} = \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{1}{12}.$$

7.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1+x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-e^{-x}+1}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}}{6} = \frac{1}{6}.$$

8.

$$((2x^3+5)^{10})' = 10(2x^3+5)^9\cdot(6x^2) = 60x^2(2x^3+5)^9.$$

9.

$$((2x+1)e^{-x^3})' = 2e^{-x^3} + (2x+1)e^{-x^3}(-3x^2) = (2-3x^2-6x^3)e^{-x^3}.$$

10.

$$\begin{aligned}
\int\left(6x^2+1+\frac{4}{x^5}\right)dx &= \int\left(6x^2+1+4x^{-5}\right)dx = \frac{6}{3}x^3 + x + \frac{4}{-5+1}x^{-5+1} + C \\
&= 2x^3 + x - x^{-4} + C = 2x^3 + x - \frac{1}{x^4} + C.
\end{aligned}$$

11.

$$\int x^2(2x^3+5)^9dx = \frac{1}{60}\int 60x^2(2x^3+5)^9dx = \frac{1}{60}(2x^3+5)^{10} + C.$$

12.

$$\int_0^1 (3x+2)^4dx = \frac{1}{3}\frac{1}{5}\left[(3x+2)^5\right]_0^1 = \frac{5^5}{15} - \frac{2^5}{15} = \frac{1031}{5}.$$

13. 微積分学の基本定理により

$$F'(x) = \left(\int_{-2}^{x} (2t+1)e^{-t^3}dt \right)' = (2x+1)e^{-x^3}.$$

III.

1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. (a)

$$\begin{array}{c|cccccc} 2 & 2 & -3 & -1 & -3 & 3 \\ & & 4 & 2 & 2 & -2 \\ \hline 2 & 2 & 1 & 1 & -1 & \boxed{1} \\ & & 4 & 10 & 22 & \\ \hline 2 & 2 & 5 & 11 & \boxed{21} & \\ & & 4 & 18 & & \\ \hline 2 & 2 & 9 & \boxed{29} & & \\ & & 4 & & & \\ \hline & 2 & \boxed{13} & & & \end{array}$$

上の組み立て除法により

$$a_0 = 1, \ a_1 = 21, \ a_2 = 29, \ a_3 = 13, \ a_4 = 2.$$

(b)

$$\begin{aligned} f(x) &= a_4(x-2)^4 + a_3(x-2)^3 + a_2(x-2)^2 + a_1(x-2) + a_0, \ f(2) = a_0 = 1 \\ f'(x) &= 4 \cdot a_4(x-2)^3 + 3 \cdot a_3(x-2)^2 + 2 \cdot a_2(x-2) + a_1, \ f'(2) = a_1 = 21 \\ f''(x) &= 4 \cdot 3 \cdot a_4(x-2)^2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3(x-2) + 2 \cdot a_2, \ f''(2) = 2 \cdot a_2 = 58 \\ f'''(x) &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4(x-2) + 3 \cdot 2 \cdot a_3, \ f'''(2) = 3 \cdot 2 \cdot a_3 = 78 \\ f''''(x) &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4, \ f''''(2) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4 = 48 \end{aligned}$$

(c) 前問の計算より

$$g(x) = (x-2)^4 + (x-2)^3 + (x-2)^2 + (x-2) + 1 = x^4 - 7x^3 + 19x^2 - 23x + 11.$$