Final Exam of NSIB 2004

各解答用紙に ID と名前を書いて下さい。問題番号の明記を忘れずに。

I. 以下の問いに答えよ。 (5pts×16)

1. $p \Rightarrow (q \vee r)$ と $(p \wedge (\neg q)) \Rightarrow r$ の真理表を作り、これらの命題が等値（真理値がいつも等しい）かどうか判定せよ。

2. 左下の行列 B はある連立一次方程式の拡大係数行列であるとする。この方程式の解が無限個存在し、解を表すのにパラメター 2 個が必要であるとき、a および b を求めよ。理由も述べよ。

$$B = \begin{bmatrix} 1 & a & -3 & b & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & b \\ 0 & a & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a & b \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -15 & 6 \end{bmatrix}$$

3. 右上の行列 C はある連立一次方程式の拡大係数行列であるする。C を既約ガウス行列に変形し、解 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 を求めよ。

4. 次の条件をみたす 3×3 行列 T を一つ書け。

$$T \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ c \\ a + 2c \end{bmatrix}$$

5. 前問で、行列 T を左からかけることはどのような行に関する基本変形を施すことと同じか。$[i; c]$ (i 行を c 倍), $[i, j]$ (i 行と j 行の入れ換え), $[i, j; c]$ (i 行に j 行の c 倍を加える) を用いて表せ。これらの基本変形を何回か施す場合は、どの順で施すかも明確に記せ。

6. $f(x) = 2x^4 + 9x^3 + 6x^2 - 8x + 5 = q(x)(x+2) + r = c_4(x+2)^4 + c_3(x+2)^3 + c_2(x+2)^2 + c_1(x+2) + c_0$ であるとき、多項式 $q(x)$, 定数 r および c_4, c_3, c_2, c_1, c_0 を求めよ。

7. $Q(x)$ は多項式で、$Q(-5) = Q(0) = Q(5) = Q(10) = 0$ かつ、$Q(15) = 1$ を満たすものとする。次数が 4 のものと、次数が 5 のものを一つずつ書け。

8. $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 2x - 4}$ を求めよ。

9. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{-2x} - 1 + 2x}{x^2}$ を求めよ。ただし、$e^0 = 1$ である。

10. $\displaystyle\frac{1}{(x^2+5)^5} = (x^2+5)^{-5}$ の導関数を求めよ。

11. $(x^2+5)e^{-x}$ の導関数を求めよ。

12. $\displaystyle\int \left(5x^4 + 1 + \frac{4}{x^5} - 3\sqrt{x}\right) dx$ を求めよ。

13. $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+5)^6} dx$ を求めよ。

14. $\displaystyle\int_0^1 10(2x+1)^4 dx$ を求めよ。

15. $F(x) = \displaystyle\int_{-2}^{x} (t^2+5)e^{-t}dt$ の導関数を求めよ。

16. $f'(x)$ は、関数 $f(x)$ の導関数、$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数、$f'''(x)$ は $f''(x)$ の 導関数、$f''''(x)$ は $f'''(x)$ の導関数を表すものとする。$f'(c) = f''(c) = f'''(c) = 0,\ f''''(c) = -5$ とするとき、$f(x)$ は $x = c$ で増加しているか、減少しているか、極小か、極大か判定し、その理由も説明せよ。

III. 下の問題 A, B, C の中から **2 問選択**して解答せよ。 (10pts×2)

A. 次の問いに答えよ。

1. 左下の行列 A の逆行列を求めよ。求める過程も書くこと。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \left\{ \begin{array}{rrrrcr} x_1 & & +x_3 & & = & 1 \\ & x_2 & -3x_3 & & = & -2 \\ x_1 & & +2x_3 & -x_4 & = & -3 \\ -2x_1 & & -2x_3 & +x_4 & = & 1 \end{array} \right.$$

2. 前問で求めた、A の逆行列を用いて、右上の連立方程式の解を求めよ。

B. 多項式 $f(x)$ は $f(1) = a_1,\ f(2) = a_2,\ f(3) = a_3,\ f(4) = a_4$ を満たすとする。この $f(x)$ を利用して、$g(1) = a_1,\ g(2) = a_2,\ g(3) = a_3,\ g(4) = a_4,\ g(5) = a_5$ なる条件を満たす多項式を求めたい。

1. $g(x)$ は、ある多項式 $h(x)$ を用いて、$g(x) = f(x) + h(x)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ と書くことができることを示せ。

2. $h(x)$ が、$h(5) = (a_5 - f(5))/(5-1)(5-2)(5-3)(5-4) = (a_5 - f(5))/24$ を満たせば、いつでも条件を満たすことを示せ。

C. Hamming 符号 は、2 進 4 桁の情報 (0,1 が四つ並んだもの $\boldsymbol{a}$ に、次の行列 G を右からかけ、

$$0+0=0,\ 0+1=1,\ 1+0=1,\ 1+1=0$$

の計算規則で求めた $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}G$ を符号としたものである。ノイズで一箇所 0 が 1 または、1 が 0 になっても、行列 H を利用することにより、ノイズが入る前の $\boldsymbol{c}$ を復元することができる。この符号に関して次の問いに答えよ。ただし、G, H を以下の行列とする。

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. この符号を使って符号化したもののどこか一箇所ノイズが入り、(1010010) となった。もともとの符号は何だったか。

2. この符号で 1 箇所のあやまりを訂正できるのはなぜか。簡単に説明せよ。

メッセージ：　数学少しは楽しめましたか。以下のことについて余白または解答用紙の裏に書いて下さい。

(A) この授業について。改善点など何でもどうぞ。

(B) ICU の教育一般について。改善点など、ICU に関すること何でもどうぞ。

受講生の皆さんに心よりの感謝をもって。　鈴木寛 (*hsuzuki@icu.ac.jp*)

NSIB FINAL 2004 解答用紙

Division: **ID#:** **Name:**

I-1.

p	q	r	$p \Rightarrow (q \vee r)$	$(p \wedge (\neg q)) \Rightarrow r$
T	T	T		
T	T	F		
T	F	T		
T	F	F		
F	T	T		
F	T	F		
F	F	T		
F	F	F		

等値かどうかの判定：

No.	PTS.
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	
11.	
12.	
13.	
14.	
15.	
16.	
A.	
B.	
C.	
Total	

NSIB FINAL 2004 Solutions

I. 以下の問いに答えよ。 (5pts×16)

1. $p \Rightarrow (q \vee r)$ と $(p \wedge (\neg q)) \Rightarrow r$ の真理表を作り、これらの命題が等値（真理値がいつも等しい）かどうか判定せよ。

p	q	r	p	$\Rightarrow$	$(q$	$\vee$	$r)$	$(p$	$\wedge$	$(\neg$	$q))$	$\Rightarrow$	r
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	T	F	F	T	$\boldsymbol{T}$	T
T	T	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	F	T	F	F	T	$\boldsymbol{T}$	F
T	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	T	T	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	T
T	F	F	T	$\boldsymbol{F}$	F	F	F	T	T	T	F	$\boldsymbol{F}$	F
F	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	F	F	F	T	$\boldsymbol{T}$	T
F	T	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	T	F	F	F	F	T	$\boldsymbol{T}$	F
F	F	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	T	F	F	T	F	$\boldsymbol{T}$	T
F	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	F	F	F	F	F	T	F	$\boldsymbol{F}$	F

等値かどうかの判定：真理値がすべて等しいので等値である。よって $(p \Rightarrow (q \vee r)) \equiv ((p \wedge (\neg q)) \Rightarrow r)$。これは、例えば「$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) = 0$ ならば、$x = 2$ または $x = -1$ を示すことと、$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) = 0$ かつ $x \neq 2$ ならば、$x = -1$ を示すこととは同値である」といったことです。なれてくれば、これらが等値であることは、意識せずに使えるようになりますが、それも訓練です。最初は意識した方が良いでしょう。

2. 左下の行列 B はある連立一次方程式の拡大係数行列であるとする。この方程式の解が無限個存在し、解を表すのにパラメター 2 個が必要であるとき、a および b を求めよ。理由も述べよ。

$$B = \begin{bmatrix} 1 & a & -3 & b & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & b \\ 0 & a & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a & b \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad B' = \begin{bmatrix} 1 & a & -3 & b & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & b \\ 0 & a+2 & 0 & 0 & 2b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 & 0 \end{bmatrix}$$

解. B の表す連立一次方程式の未知数の数は 4、解を表すパラメタの数が 2 だから、係数行列の階数は 2 でそれは、拡大係数行列の階数とも等しくなければならない。B に $[3,2;2]$ および $[4,2;-1]$ を施すと B' を得る。第 4 行を見ると、階数が 2 となるためには、$a+2=0$。$a=-2$ を、第 3 行に代入すると、拡大係数行列の階数と、係数行列の解数が等しいことから、$1+2b=0$。これは、$b=-1/2$ をえる。したがって、$a=-2, b=-1/2$ を得る。この結果にさらに、$[1,2;2]$ を施せば、既約ガウス行列を得、それは、題意を満たす。 ■

3. (右上の) 行列 C はある連立一次方程式の拡大係数行列であるする。C を既約ガウス行列に変形し、解 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 を求めよ。

解. C に $[3,1;1]$, $[4;1/3]$, $[3,2;-1]$, $[3,4]$ を順に施すと、

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -15 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -15 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

従って、解は s, t をパラメターとして以下のように表される。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-t+1 \\ -3s-2t+3 \\ s \\ 5t+2 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. 次の条件をみたす 3×3 行列 T を一つ書け。

$$T \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ c \\ a+2c \end{bmatrix}$$

解.

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a+2c & 1 & 0 & 2 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a+2c & 1 & 0 & 2 \\ -b & 0 & -1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} -b & 0 & -1 & 0 \\ a+2c & 1 & 0 & 2 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -b & 0 & -1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \\ a+2c & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. 前問で、行列 T を左からかけることはどのような行に関する基本変形を施すことと同じか。$[i;c]$ (i 行を c 倍), $[i,j]$ (i 行と j 行の入れ換え), $[i,j;c]$ (i 行に j 行の c 倍を加える) を用いて表せ。これらの基本変形を何回か施す場合は、どの順で施すかも明確に記せ。

解.　上の変形は順に、$[1,3;2] \to [2;-1] \to [1,2] \to [2,3]$ である。他にも、$[2,3] \to [1,3] \to [1;-1] \to [3,2;2]$, この最初の二つを $[1,3] \to [1,2] \to$ や、$[1,2] \to [2,3] \to$ に換えたもの、$[1,3;2] \to [2;-1] \to [1,3] \to [1,2]$ など、多数。

6. $f(x) = 2x^4+9x^3+6x^2-8x+5 = q(x)(x+2)+r = c_4(x+2)^4+c_3(x+2)^3+c_2(x+2)^2+c_1(x+2)+c_0$ であるとき、多項式 $q(x)$, 定数 r および c_4, c_3, c_2, c_1, c_0 を求めよ。

解.

-2	2	9	6	-8	5
		-4	-10	8	0
-2	2	5	-4	0	$5\ (r=c_0)$
		-4	-2	12	
-2	2	1	-6	$12\ (c_1)$	
		-4	6		
-2	2	-3	$0\ (c_2)$		
		-4			
-2	2	$-7\ (c_3)$			
	$2\ (c_4)$				

これより、$q(x) = 2x^3+5x^2-4x$, $r=5$, $c_4=2$, $c_3=-7$, $c_2=0$, $c_1=12$, $c_0=5$ となる。

7. $Q(x)$ は多項式で、$Q(-5) = Q(0) = Q(5) = Q(10) = 0$ かつ、$Q(15) = 1$ を満たすものとする。次数が 4 のものと、次数が 5 のものを一つずつ書け。

解.

$$\begin{aligned}
4\text{次} &: \quad \frac{(x+5)(x-0)(x-5)(x-10)}{(15+5)(15-0)(15-5)(15-10)} = \frac{(x+5)x(x-5)(x-10)}{15000} \\
5\text{次} &: \quad \frac{(x+5)(x-0)(x-5)(x-10)}{(15+5)(15-0)(15-5)(15-10)} + (x+5)x(x-5)(x-10)(x-15) \\
& \quad\ \ \frac{(x+5)(x-0)(x-5)(x-10)(x-14)}{(15+5)(15-0)(15-5)(15-10)}
\end{aligned}$$

5 次は、最初のものの第 2 項に零でない定数をかけたものであれば何でも構いません。5 次の 2 番目のものを書いた方も複数いましたが、なかなか賢いですね。

8. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^3-2x-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x^2+2x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x+4}{x^2+2x+2} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}.$

因数分解は、組み立て除法を用いるのが一番確実で簡単だとおもいます。これも、0/0 の形ですから、L'Hospital の定理を用いて、分母・分子を微分する方法もあります。

9. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-2x}-1+2x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2e^{-2x}+2}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{(-2)(-2)e^{-2x}}{2} = 2.$

0/0 の形ですから、L'Hospital の定理を用いることができ、分母・分子を微分しても、極限は変わりません。この場合は、微分したものがまた、0/0 の形になっていますから、($e^0 = 1$ に注意) もう一度、分母・分子を微分します。微分するときに、$(e^{-2x})' = e^{-2x}(-2x)' = -2 \cdot e^{-2x}$ であることに注意して下さい。

10. $\displaystyle\frac{1}{(x^2+5)^5} = (x^2+5)^{-5}$ の導関数を求めよ。

$$\left(\frac{1}{(x^2+5)^5}\right)' = ((x^2+5)^{-5})' = -5(x^2+5)^{-6}(x^2+5)' = -5(x^2+5)^{-6}(2x) = \frac{-10x}{(x^2+5)^6}.$$

これも合成関数の微分です。上の変形では、$h(x) = x^2+5$, $g(X) = X^{-5}$ とみて、微分しています。もちろん、商の微分を使うこともできますが、いずれにしても、合成関数の微分を利用しないといけませんので、上のようにしました。

11. $(x^2+5)e^{-x}$ の導関数を求めよ。

$$\begin{aligned}
((x^2+5)e^{-x})' &= (x^2+5)'e^{-x} + (x^2+5)(e^{-x})' = 2xe^{-x} + (x^2+5)e^{-x}(-x)' \\
&= 2xe^{-x} - (x^2+5)e^{-x} = -(x^2-2x+5)e^{-x}.
\end{aligned}$$

12. $\displaystyle\int \left(5x^4 + 1 + \frac{4}{x^5} - 3\sqrt{x}\right) dx \quad (C \text{ は積分定数})$

$$\begin{aligned}
&= \int (5x^4 + x^0 + 4x^{-5} - 3x^{1/2})dx = \frac{5}{4+1}x^{4+1} + \frac{1}{0+1}x^{0+1} + \frac{4}{-5+1}x^{-5+1} - \frac{3}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C \\
&= x^5 + x - x^{-4} - 2x^{\frac{3}{2}} + C = x^5 + x - \frac{1}{x^4} - 2x\sqrt{x} + C.
\end{aligned}$$

13. $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+5)^6}dx$　(C は積分定数)

$$= \quad -\frac{1}{10}\int \frac{-10x}{(x^2+5)^6}dx = -\frac{1}{10}\int \left(\frac{1}{(x^2+5)^5}\right)' dx = -\frac{1}{10}\frac{1}{(x^2+5)^5} + C = -\frac{1}{10(x^2+5)^5} + C.$$

I-10 を用いた。

14. $\displaystyle\int_0^1 10(2x+1)^4 dx = \left[(2x+1)^5\right]_0^1 = 3^5 - 1^5 = 242.$

$((2x+1)^5)' = 5(2x+1)^4(2x+1)' = 10(2x+1)^4$ に注意。また、0 を代入しても、0 とはならない場合もありますから、そこも注意して下さい。

15. $F(x) = \displaystyle\int_{-2}^{x}(t^2+5)e^{-t}dt$ の導関数を求めよ。

解.　微分積分学の基本定理より、$F'(x) = (x^2+5)e^{-x}$ となります。

16. $f'(x)$ は、関数 $f(x)$ の導関数、$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数、$f'''(x)$ は $f''(x)$ の 導関数、$f''''(x)$ は $f'''(x)$ の導関数を表すものとする。$f'(c) = f''(c) = f'''(c) = 0,\ f''''(c) = -5$ とするとき、$f(x)$ は $x = c$ で増加しているか、減少しているか、極小か、極大か判定し、その理由も説明せよ。

解.　$f'''(x)$ の導関数 $f''''(x)$ は c で負の値をとるから、$f'''(x)$ は $x = c$ の付近で減少。仮定より $f'''(c) = 0$ だから、$x < c$ では $f'''(x) > 0$、$x > c$ では $f'''(x) < 0$。したがって、$f''(x)$ は $x < c$ で増加、$x > c$ で減少。$x = c$ では仮定から 0 だから、$x = c$ の付近では $x \neq c$ のとき $f''(x) < 0$ である。したがって、$f'(x)$ は $x = c$ の付近で減少している。$f'(c) = 0$ だから、$x < c$ では $f'(x) > 0$、$x > c$ では $f'(x) < 0$。これは、$f(x)$ が $x = c$ で増加から減少に転ずることを意味するから、$f(x)$ は $x = c$ で極大である。■

III. 下の問題 A, B, C の中から **2 問選択**して解答せよ。　(10pts×2)

A.　次の問いに答えよ。

1. 左下の行列 A の逆行列を求めよ。求める過程も書くこと。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} x_1 & & +x_3 & & = & 1 \\ & x_2 & -3x_3 & & = & -2 \\ x_1 & & +2x_3 & -x_4 & = & -3 \\ -2x_1 & & -2x_3 & +x_4 & = & 1 \end{array} \right.$$

解.　$[A, I]$ を変形する。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

最後の行列の右半分が A^{-1}。

2. 前問で求めた、A の逆行列を用いて、右上の連立方程式の解を求めよ。

解. $x_1 = 2,\ x_2 = -5,\ x_3 = -1,\ x_4 = 3$。下のように $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}$ を決めると $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ だから、

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = A^{-1}A\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

B. 多項式 $f(x)$ は $f(1) = a_1,\ f(2) = a_2,\ f(3) = a_3,\ f(4) = a_4$ を満たすとする。この $f(x)$ を利用して、$g(1) = a_1,\ g(2) = a_2,\ g(3) = a_3,\ g(4) = a_4,\ g(5) = a_5$ なる条件を満たす多項式を求めたい。

1. $g(x)$ は、ある多項式 $h(x)$ を用いて、$g(x) = f(x) + h(x)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ と書くことができることを示せ。

解. $F(x) = g(x) - f(x)$ とすると、仮定から $F(1) = g(1) - f(1) = 0$, 同様に $F(2) = F(3) = F(4) = 0$ となる。したがって、Theorem 5.1 (3) より $F(x) = h(x)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ となる多項式 $h(x)$ が存在する。$F(x) = g(x) - f(x)$ だから $g(x) = f(x) + h(x)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ と書くことができる。大切な点は、このように書けていれば、$g(1) = a_1$, $g(2) = a_2$ などとなることではなく、ここで求めているのは、この条件を満たしていれば、かならず、$g(x) = f(x) + h(x)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ の形に書くことができるということです。この違いはわかりますね。

2. $h(x)$ が、$h(5) = (a_5 - f(5))/(5-1)(5-2)(5-3)(5-4) = (a_5 - f(5))/24$ を満たせば、いつでも条件を満たすことを示せ。

解. $h(5) = (a_5 - f(5))/24$ とすると、

$$g(5) = f(5) + h(5)(5-1)(5-2)(5-3)(5-4) = f(5) + 24h(5) = f(5) + (a_5 - f(5)) = a_5$$

となる。$g(1) = a_1,\ g(2) = a_2,\ g(3) = a_3,\ g(4) = a_4$ となることは、$g(x) = f(x) + h(x)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ から明らかだから、常に $g(x)$ の条件を満たす。 ■

C. Hamming 符号 は、2 進 4 桁の情報 (0,1 が四つ並んだもの $\boldsymbol{a}$ に、次の行列 G を右からかけ、

$$0 + 0 = 0,\ 0 + 1 = 1,\ 1 + 0 = 1,\ 1 + 1 = 0$$

の計算規則で求めた $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}G$ を符号としたものである。ノイズで一箇所 0 が 1 または、1 が 0 になっても、行列 H を利用することにより、ノイズが入る前の $\boldsymbol{c}$ を復元することができる。この符号に関して次の問いに答えよ。ただし、G, H を以下の行列とする。

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. この符号を使って符号化したもののどこか一箇所ノイズが入り、(1010010) となった。もともとの符号は何だったか。

解. $(1010010)H$ を計算すると、演算が $0, 1$ だけの演算であることに注意すると、(100) を得る。これは、2 進の 4 だから、4 番目にノイズが入ったと考えられるから、もともとの符号は、(1011010) となる。 ■

2. この符号で 1 箇所のあやまりを訂正できるのはなぜか。簡単に説明せよ。

解. i 番目が 1 でそれ以外が 0 のものを $\boldsymbol{e}_i$ とする。($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$) たとえば $\boldsymbol{e}_4 =$ (0001000)。$\boldsymbol{c}$ にノイズが入り一箇所、例えば i 番めがかわるということは、$\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}_i$ になるということである。$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot G$ で得られ、$G \cdot H = O$ だから、

$$(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}_i)H = \boldsymbol{c} \cdot H + \boldsymbol{e}_i \cdot H = \boldsymbol{a} \cdot G \cdot H + \boldsymbol{e}_i \cdot H = \boldsymbol{a} \cdot O + \boldsymbol{e}_i \cdot H = \boldsymbol{e}_i \cdot H$$

$\boldsymbol{e}_i H$ は H の i 行めが得られ、この場合は、2 進の i を表すから、どこにノイズが入ったかを特定することができる。

別解として、$C = \{\boldsymbol{a} \cdot G \mid \boldsymbol{a} \in K^4\}$ の要素同士は、少なくとも 3 箇所以上異なっているので、一箇所かわっても、元の位置を特定できることを説明しても良い。ここで、K^4 は 2 進 4 桁のもの全体。

成績の情報はホームページ (http://subsite.icu.ac.jp/people/hsuzuki/science/class/ns1b/) にあります。
熱心に数学を学んで下さった受講生の皆さんに心よりの感謝をもって。 鈴木寛 (*hsuzuki@icu.ac.jp*)