Quiz 1

Division: **ID#:** **Name:**

1. p, q, r を命題とする。このとき、次の式が成り立つかどうかを、下の真理表を完成することによって判定せよ。理由も記せ。

$$(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r).$$

p	q	r	$(p \vee q) \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$	x
T	T	T			F
T	T	F			F
T	F	T			T
T	F	F			F
F	T	T			F
F	T	F			T
F	F	T			F
F	F	F			T

[**判定と理由**]

2. $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ を $\neg$ と $\vee$ と 括弧だけを用いて表せ。これらは、何度使っても良いが、$\Rightarrow$ と $\wedge$ は使わないこと。

3. 上の真理表の一番右の列 x を表す論理式になるように、下の 下線の部分に、$\neg$, $\wedge$, または、$\vee$ を入れよ。空欄となる箇所があるかも知れない。

$$\begin{aligned} x \quad \equiv \quad & ((((\neg\, p) \,\_\_\, (\neg\, q)) \,\_\_\, (\neg\, r)) \;\vee \\ & (((\_\_\, p) \,\_\_\, (\neg\, q)) \;\wedge\; (\_\_\, r))) \,\_\_ \\ & (((\_\_\, p) \;\wedge\; (\_\_\, q)) \,\_\_\, (\_\_\, r)) \end{aligned}$$

Message 欄：将来の夢、25 年後の自分について、世界について。(「HP 掲載不可」は明記の事。)

Solutions to Quiz 1

1. p, q, r を命題とする。このとき、次の式が成り立つかどうかを、下の真理表を完成することによって判定せよ。理由も記せ。

$$(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r).$$

p	q	r	$(p$	$\vee$	$q)$	$\Rightarrow$	r	$(p$	$\Rightarrow$	$r)$	$\wedge$	$(q$	$\Rightarrow$	$r)$	x
T	T	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	F
T	T	F	T	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	T	F	F	$\boldsymbol{F}$	T	F	F	F
T	F	T	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	T	T
T	F	F	T	T	F	$\boldsymbol{F}$	F	T	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	F
F	T	F	F	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	F	T	F	$\boldsymbol{F}$	T	F	F	T
F	F	T	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	T	F
F	F	F	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	F	F	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	F	T

[**判定と理由**]

二つの論理式の真理値が、p, q, r の真理値に関わらず等しいから、等値である。すなわち、上の式は成立する。

2. $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ を $\neg$ と $\vee$ と 括弧だけを用いて表せ。これらは、何度使っても良いが、$\Rightarrow$ と $\wedge$ は使わないこと。

解：一般的に $a \Rightarrow b \equiv (\neg a) \vee b$。上の二つの論理式は等しいから、前の式を書き替えると、次のようになる。

$$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \equiv (p \vee q) \Rightarrow r \equiv (\neg(p \vee q)) \vee r$$

3. 上の真理表の一番右の列 x を表す論理式になるように、下の 下線の部分に、$\neg$, $\wedge$, または、$\vee$ を入れよ。空欄となる箇所があるかも知れない。

$$\begin{aligned} x \quad \equiv \quad & ((((\neg\, p) \underline{\wedge} (\neg\, q)) \underline{\wedge} (\neg\, r)) \ \vee \\ & (((\underline{\quad}\, p) \underline{\wedge} (\neg\, q)) \ \wedge \ (\underline{\quad}\, r))) \underline{\vee} \\ & (((\underline{\neg} p) \ \wedge \ (\underline{\quad}\, q)) \underline{\wedge} (\underline{\neg}\, r)) \end{aligned}$$

Quiz 2

Division: **ID#:** **Name:**

行列の行に関する三つの基本変形をそれぞれ以下の記号で表すことにする。
$[i;c]$: 第 i 行を c 倍する (ただし $c \neq 0$). $[i,j]$: 第 i 行と第 j 行を交換する.
$[i,j;c]$: 第 i 行に第 j 行の c 倍を加える.

以下のようにある連立一次方程式の拡大係数行列に行に関する基本変形を施した。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 2 & -6 & -2 & -4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{(A)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & -6 & 0 & 2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{(B)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & -6 & 0 & 2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{(C)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & -6 & 0 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

1. (A), (B), (C) で行なっている行に関する基本変形を上の記号で書け。

   (A) $\boxed{}$ (B) $\boxed{}$ (C) $\boxed{}$

2. 最後 (4 つ目) の行列にさらに行に関する基本変形を何回か施して得られる、既約ガウス行列を書け。

3. この連立一次方程式の解について正しいものを (a)–(e) の中から選べ。
   (a) 解はない。(b) 解はただ一つ。(c) 解は無限個、パラメター一個で表せる。
   (d) 解は無限個、パラメター二個で表せる。(e) (a)-(d) のいずれでもない。

4. この連立一次方程式の解 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ を求めよ。

Message 欄（裏にもどうぞ）：あなたにとって一番たいせつな（または、たいせつにしたい）もの、ことはなんですか。(「HP 掲載不可」は明記の事。)

Solutions to Quiz 2

行列の行に関する三つの基本変形をそれぞれ以下の記号で表すことにする。
$[i;c]$: 第 i 行を c 倍する (ただし $c \neq 0$). $[i,j]$: 第 i 行と第 j 行を交換する.
$[i,j;c]$: 第 i 行に第 j 行の c 倍を加える.

以下のようにある連立一次方程式の拡大係数行列に行に関する基本変形を施した。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 2 & -6 & -2 & -4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{(A)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & -6 & 0 & 2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{(B)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & -6 & 0 & 2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{(C)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & -6 & 0 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

1. (A), (B), (C) で行なっている行に関する基本変形を上の記号で書け。

   (A) $\boxed{[4,1;2]}$ (B) $\boxed{[2,1;1]}$ (C) $\boxed{[2,3]}$

2. 最後 (4 つ目) の行列にさらに行に関する基本変形を何回か施して得られる、既約ガウス行列を書け。

   解：右下の行列が求める既約ガウス行列である。

$$\xrightarrow{[4,2;2]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{[1,3;-1]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. この連立一次方程式の解について正しいものを (a)–(e) の中から選べ。

   (a) 解はない。(b) 解はただ一つ。(c) 解は無限個、パラメター一個で表せる。

   (d) 解は無限個、パラメター二個で表せる。 <u>(e) (a)-(d) のいずれでもない。</u>

4. この連立一次方程式の解 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ を求めよ。

   解：

$$\begin{cases} x_1 &= 1 - s - 4u, \\ x_2 &= 3 + 2s - 3t + u, \\ x_3 &= s, \\ x_4 &= t, \\ x_5 &= -2 + u, \\ x_6 &= u. \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   s と t と u はパラメター

Quiz 3

Division: **ID#:** **Name:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & -22 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -22 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とし（注：$C = [A\,I]$）以下の様にして行列 A の逆行列を求める。

$$C \to C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -25 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to C_2 \to C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -25 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \cdots$$

ここで、C にある行列 S を左からかけると C_1 が得られ、C_1 に T を左からかけると C_2、C_2 に行列 U を左からかけると C_3 が得られるとする。

1. 行列 S の逆行列 S^{-1} を求めよ。

2. 行列 U と T の積 UT を求めよ。

3. 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ。

4. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ とするとき、A の逆行列を用いて x, y, z を求めよ。

Message 欄（裏にもどうぞ）：今までで一番嬉しかった（感謝している）こと、悲しかったこと、今、怒っていること。今年の抱負。（「ホームページ掲載不可」は明記のこと。）

Solutions to Quiz 3

$$C \to C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -25 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to C_2 \to C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -25 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \cdots$$

ここで、C にある行列 S を左からかけると C_1 が得られ、C_1 に T を左からかけると C_2、C_2 に行列 U を左からかけると C_3 が得られるとする。

解：それぞれのステップで基本変形、$[2,1;1], [3,1;2], [2,3]$ を順に施したことがわかる。($[2,1;1], [2,3], [2,1;2]$ とも考えられる。)

1. 行列 S の逆行列 S^{-1} を求めよ。

   解：$S = P(2,1;1)$ は、$C_1 = SC = S[A,I] = [SA, S]$ より C_1 の右半分の行列だから、

$$[S, I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   となる。これは、$P(2,1;-1)$ と表される行列である。

2. 行列 U と T の積 UT を求めよ。

   解：T は左からかけると $[3,1;2]$, U は左からかけると、$[2,3]$ で表される行に関する変形をするのだから、$UT = UTI$ より I に $[3,1;2]$、$[2,3]$ を順に施した得られる行列が UT である。従って、

$$UT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ または、 } UT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   を計算しても得られる。

3. 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ。

   解：C_3 にさらに、$[3,2;-4]$, $[3;-1]$, $[1,3;3]$, $[2,3;6]$ を順に施すと、

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 1 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 22 & -3 & 12 \\ 0 & 1 & -6 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 22 & -3 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 44 & -6 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \text{ 従って } A^{-1} = \begin{bmatrix} 22 & -3 & 12 \\ 44 & -6 & 25 \\ 7 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

4. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ とするとき、A の逆行列を用いて x, y, z を求めよ。

   解：$\boldsymbol{x} = I\boldsymbol{x} = A^{-1}A\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ だから $\boldsymbol{b}$ に 上で求めた A^{-1} をかければよい。

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 22 & -3 & 12 \\ 44 & -6 & 25 \\ 7 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -3 \\ y & = & -6 \\ z & = & -1 \end{array} \right. .$$

Quiz 4

Division: **ID#:** **Name:**

1. $x^4+2x^3-3x^2-6x-5 = q(x)(x+2)+r$ となるような多項式 $q(x)$ と数 r を求めよ。

2. $x^4+2x^3-3x^2-6x-5 = a_4(x-2)^4+a_3(x-2)^3+a_2(x-2)^2+a_1(x-2)+a_0$ となるような数 a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 を求めよ。

3. $h(x) = a(x-3)(x-5)(x-7)+b(x-1)(x-5)(x-7)+c(x-1)(x-3)(x-7)+d(x-1)(x-3)(x-5)$ は、$h(1)=48$, $h(3)=-3$, $h(5)=16$, $h(7)=-1$ を満たすとする。このとき、a, b, c, d を求めよ。

4. $h(x)$ を前問の多項式とする。このとき、$f(1)=h(1)$, $f(3)=h(3)$, $f(5)=h(5)$, $f(7)=h(7)$ となる多項式で $f(0)=h(0)$ かつ $\deg f(x)=6$ となるものを一つ書け。$h(x)$ を用いて書いても良い。

Message 欄（裏にもどうぞ）：どんなおとなが魅力的ですか。こどもの魅力は何でしょう。

Solutions to Quiz 4

1. $x^4+2x^3-3x^2-6x-5=q(x)(x+2)+r$ となるような多項式 $q(x)$ と数 r を求めよ。

   解：下のように組み立て除法で求めると (3 行目まで)、$q(x)=c_3x^3+c_2x^2+c_1x+c_0=x^3-3x$, $r=-5$。

-2	1	2	-3	-6	-5
		-2	0	6	0
	$1\ (c_3)$	$0\ (c_2)$	$-3\ (c_1)$	$0\ (c_0)$	$\boxed{-5\ (r)}$

2. $x^4+2x^3-3x^2-6x-5=a_4(x-2)^4+a_3(x-2)^3+a_2(x-2)^2+a_1(x-2)+a_0$ となるような数 a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 を求めよ。

   解：下の組み立て除法から、$a_4=1, a_3=10, a_2=33, a_1=38, a_0=3$ となります。

2	1	2	-3	-6	-5
		2	8	10	8
2	1	4	5	4	$\boxed{3\ (r=a_0)}$
		2	12	34	
2	1	6	17	$\boxed{38\ (a_1)}$	
		2	16		
2	1	8	$\boxed{33\ (a_2)}$		
		2			
2	$1\ (a_4)$	$\boxed{10\ (a_3)}$			

3. $h(x)=a(x-3)(x-5)(x-7)+b(x-1)(x-5)(x-7)+c(x-1)(x-3)(x-7)+d(x-1)(x-3)(x-5)$ は、$h(1)=48$, $h(3)=-3$, $h(5)=16$, $h(7)=-1$ を満たすとする。このとき、a, b, c, d を求めよ。

   解：

$$
\begin{aligned}
h(x) &= 48\frac{(x-3)(x-5)(x-7)}{(1-3)(1-5)(1-7)} - 3\frac{(x-1)(x-5)(x-7)}{(3-1)(3-5)(3-7)} \\
&\quad + 16\frac{(x-1)(x-3)(x-7)}{(5-1)(5-3)(5-7)} - \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(7-1)(7-3)(7-5)} \\
&= -(x-3)(x-5)(x-7) - \frac{3}{16}(x-1)(x-5)(x-7) \\
&\quad - (x-1)(x-3)(x-7) - \frac{1}{48}(x-1)(x-3)(x-5)
\end{aligned}
$$

   だから、$a=-1$, $b=-\frac{3}{16}$, $c=-1$, $d=-\frac{1}{48}$ となります。

4. $h(x)$ を前問の多項式とする。このとき、$f(1)=h(1)$, $f(3)=h(3)$, $f(5)=h(5)$, $f(7)=h(7)$ となる多項式で $f(0)=h(0)$ かつ $\deg f(x)=6$ となるものを一つ書け。$h(x)$ を用いて書いても良い。

   解：たとえば左下の多項式は次数が 6 で条件を満たす。

$$h(x)+x^2(x-1)(x-3)(x-5)(x-7), \quad h(x)+g(x)(x-1)(x-3)(x-5)(x-7).$$

   で $g(x)$ が一次多項式 $ax(x+b)$ $(a\neq 0)$ であれば、いつでも条件を満たします。逆に、条件を満たすものは、すべてこのように書くことができます。

Quiz 5

Division: **ID#:** **Name:**

1. 次の極限を求めよ。極限がない場合はその理由も書いて下さい。途中の式も略さずに。(Show work !)

   (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2-3n}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{x^2+4}{x+2}$

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x-2}$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^4-9x^2+4x+12}{x^4-3x^3+3x^2-8x+12}$ を求めよ。途中の式も略さずに。(Show work!)

3. 地震の強さを表す単位マグニチュード (M) は、そのエネルギー E の（2 を底とする）対数 $(\log_2)$ をとった値の一次関数（$c\cdot\log_2 E+b$ の形）で表される。また、$M6$ の地震のエネルギーは広島に落された原子爆弾のエネルギーに相当し、エネルギーが 2 倍になると、マグニチュードが 0.2 増加する。マグニチュードが x の地震は、広島型原爆 n 個分のエネルギーに相当するとして、 n を x で表す式を求めよ。ただし n は整数でなくても良いものとする。

Message 欄（裏にもどうぞ）： (1) 結婚について、家庭について、子供について。 (2) この授業について。要望・改善点など。(「ホームページ掲載不可」の場合は明記のこと。)

Solutions to Quiz 5

1. 次の極限を求めよ。極限がない場合はその理由も書いて下さい。途中の式も略さずに。(Show work !)

   (a) $\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2-3n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}-3} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$

   (b) $\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2} = \lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = \lim_{x\to-2} x-2 = -4.$

   (c) $\lim_{x\to-2}\frac{x^2+4}{x+2}$ 発散
   $x+2$ は $x\to-2$ のときいくらでも小さくなる。分子は 4 より大きいので、一定の値には収束しません。The limit does not exist! 極限が $+\infty$ とは限りません。$x+2$ は $x=-2$ の近くで負の値にもなるからです。

   (d) $\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{0}{-4} = 0.$

2. $\lim_{x\to2}\frac{x^4-9x^2+4x+12}{x^4-3x^3+3x^2-8x+12}$ を求めよ。途中の式も略さずに。(Show work!)
   解:$f(x)=x^4-9x^2+4x+12,\ g(x)=x^4-3x^3+3x^2-8x+12$ とすると、$f(2)=g(2)=0$ となる。従って、$\lim_{x\to2} f(x)/g(x)$ は、0/0 の不定形になる。そこで、組み立て除法を用い、$f(x)=(x-2)(x^3+2x^2-5x-6),\ g(x)=(x-2)(x^3-x^2+x-6)$ と書くと、
   $$\lim_{x\to2}\frac{x^4-9x^2+4x+12}{x^4-3x^3+3x^2-8x+12} = \lim_{x\to2}\frac{x^3+2x^2-5x-6}{x^3-x^2+x-6}$$
   となるところが、これもまた不定形なので、組み立て除法を用いて
   $$= \lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+4x+3)}{(x-2)(x^2+x+3)} = \lim_{x\to2}\frac{x^2+4x+3}{x^2+x+3} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}.$$

3. 地震の強さを表す単位マグニチュード (M) は、そのエネルギー E の（2 を底とする）対数 $(\log_2)$ をとった値の一次関数（$c\cdot\log_2 E+b$ の形）で表される。また、$M6$ の地震のエネルギーは広島に落された原子爆弾のエネルギーに相当し、エネルギーが 2 倍になると、マグニチュードが 0.2 増加する。マグニチュードが x の地震は、広島型原爆 n 個分のエネルギーに相当するとして、 n を x で表す式を求めよ。ただし n は整数でなくても良いものとする。
   解：$n = 2^{5(x-6)} = 32^{x-6}.$
   マグニチュード x の地震のエネルギーを $E(x)$ とすると、$n=E(x)/E(6)$ でかつ、$E(x+0.2)=2\cdot E(x)$ である。 $x = c\cdot\log_2 E(x)+b$ と表すと.
   $$0.2 = c\cdot\log_2(E(x+0.2))+b-(c\cdot\log_2(E(x))+b) = c\cdot\log_2\frac{E(x+0.2)}{E(x)} = c\cdot\log_2 2 = c.$$
   従って、$x-6 = 0.2\log_2(E(x)/E(6)) = 0.2\log_2 n$ これより、$(x-6)/0.2 = 5(x-6) = \log_2 n$ となるから、求める結果が得られる。

Quiz 6

Division: **ID#:** **Name:**

1. 次の関数 $y = f(x)$ の導関数を求めよ。(No need to simplify!)

   (a) $y = -2x^3 + x^2 - 5x + 1$

   (b) $y = (x^2 - x + 1)(e^x + 1)$

   (c) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

   (d) $y = \sqrt{x} - \dfrac{1}{x^3} + 2\log x + 5x^{7/5}$

   (e) $y = (x^2 + 3)^{100}$

   (f) $y = xe^{x^2}$

2. $f(x) = \dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{1}{4}x^4 - x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 - 2x + 1$ とする。

   $f(x)$ の導関数を求め、$x = -1, 0$ および 2 のとき、$f(x)$ は増加か、減少か、極大か、極小かを決定せよ。理由も記せ。(Show work!)

   (a) $f'(x) =$

   (b) $x = -1$

   (c) $x = 0$

   (d) $x = 2$

Message 欄（裏にもどうぞ）：最近感激したこと・本・映画・芸術・人・言葉など。簡単な解説もお願いします。(「ホームページ掲載不可」の場合は明記のこと。)

Solutions to Quiz 6

1. 次の関数 $y = f(x)$ の導関数を求めよ。(No need to simplify!)

   (a) $y = -2x^3 + x^2 - 5x + 1$
   $(x^3)' = 3x^2$, $(x^2)' = 2x$, $(x)' = 1$, $(1)' = 0$ だから、$y' = -6x^2 + 2x - 5$.

   (b) $y = (x^2 - x + 1)(e^x + 1)$
   $y' = (2x - 1)(e^x + 1) + (x^2 - x + 1)e^x$.　　（積の微分参照）

   (c) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$
   $y' = \dfrac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$.　　（商の微分参照）

   (d) $y = \sqrt{x} - \dfrac{1}{x^3} + 2\log x + 5x^{7/5} = x^{1/2} - x^{-3} + 2\log x + 5x^{7/5}$
   $y' = \dfrac{1}{2}x^{-1/2} - (-3)x^{-4} + 2\dfrac{1}{x} + 5 \cdot \dfrac{7}{5}x^{2/5} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{3}{x^4} + \dfrac{2}{x} + 7\sqrt[5]{x^2}$

   (e) $y = (x^2 + 3)^{100}$
   $y' = 100(x^2 + 3)^{99}(x^2 + 3)' = 200x(x^2 + 3)^{99}$.
   （合成関数の微分：$h(x) = x^2 + 3$, $g(X) = X^{100}$, $y = f(x) = g(h(x))$.）

   (f) $y = xe^{x^2}$
   $y' = x(e^{x^2})' + e^{x^2} = xe^{x^2}(x^2)' + e^{x^2} = (2x^2 + 1)e^{x^2}$
   （積の微分と合成関数の微分：$f(x) = e^{x^2} = g(h(x))$, $h(x) = x^2$, $g(X) = e^X$.）

2. $f(x) = \dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{1}{4}x^4 - x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 - 2x + 1$ とする。

   $f(x)$ の導関数を求め、$x = -1, 0$ および 2 のとき、$f(x)$ は増加か、減少か、極大か、極小かを決定せよ。理由も記せ。(Show work!)

   (a) $f'(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$

   (b) $x = -1$: $f'(-1) = 0$, $f''(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 5$, $f''(-1) = 0$, $f'''(x) = 12x^2 + 6x - 6$, $f'''(-1) = 0$, $f''''(x) = 24x + 6$, $f''''(-1) = -18 < 0$. 従って、$f'''(x)$ は $x = -1$ で減少かつ $f'''(-1) = 0$ だから、$f'''(x) > 0$ $(x < -1)$ かつ $f'''(x) < 0$ $(x > -1)$ だから、$f''(x)$ は $x = -1$ で増加から減少に転じる。$f''(-1) = 0$ だから $f''(x) < 0$ $(x \neq -1)$ したがって $f''(x)$ は $x = -1$ で減少で、$f'(-1) = 0$ よって、 $f'(x) > 0$ $(x < -1)$ かつ $f'(x) < 0$ $(x > -1)$。これは、$f(x)$ が $x = -1$ で 増大から減少に転じることがわかり、$x = -1$ で極大である。

   (c) $x = 0$: $f'(0) = -2 < 0$ だから $f(x)$ は $x = 0$ で減少。

   (d) $x = 2$: $f'(2) = 0$, かつ $f''(2) = 27 > 0$ だから $f'(x)$ は $x = 2$ で増加で $f'(2) = 0$ だから $f'(x)$ は $x = 2$ を境に負から正に転じる。よって $f(x)$ は $x = 2$ で減少から増大に転じるので、$x = 2$ で極小。

Quiz 7

Division: **ID#:** **Name:**

1. $f(x) = (x^2+1)^9$ の導関数を求めよ。

2. $\int (x^2+1)^9 dx = F(x) + C$ (C は積分定数）とするとき、$F'(x)$ を求めよ。

3. $\int x(x^2+1)^8 dx$ を求めよ。

4. 次の計算をせよ。

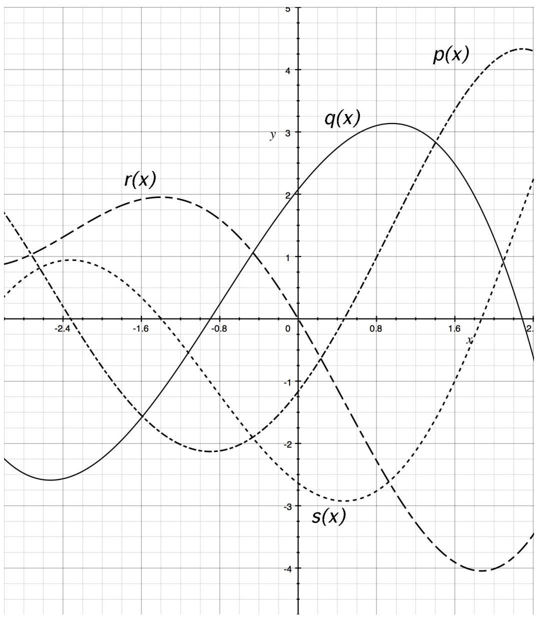
   (a) $\displaystyle\int (4x^3 - x^2 + 6x - 1)dx$

   (b) $\displaystyle\int (\frac{6}{x^4} + \sqrt{x})dx$

   (c) $\displaystyle\int (\frac{1}{x} + 2e^{-2x})dx$

5. $p(x), q(x), r(x), s(x)$ についての記述のうちで正しいのはどれか。簡単に理由を記せ。

   (a) $p'(x) = q(x),\ q'(x) = r(x),\ r'(x) = s(x).$
   (b) $q'(x) = p(x),\ p'(x) = s(x),\ s'(x) = r(x).$
   (c) $r'(x) = s(x),\ s'(x) = p(x),\ p'(x) = q(x).$
   (d) $r'(x) = p(x),\ p'(x) = q(x),\ q'(x) = s(x).$
   (e) $s'(x) = r(x),\ r'(x) = q(x),\ q'(x) = p(x).$
   (f) $s'(x) = p(x),\ p'(x) = q(x),\ q'(x) = s(x).$
   [理由]



Message 欄（裏にもどうぞ）: 国際人（World Citizen）とは。ICU のそして自分の「国際性」にとって必要なこと。(「ホームページ掲載不可」の場合は明記のこと。)

Solutions to Quiz 7

1. $f(x) = (x^2+1)^9$ の導関数を求めよ。

   解：$h(x) = x^2+1,\ g(X) = X^9$ とすると、$f(x) = g(h(x))$ だから、$f'(x) = g'(h(x))h'(x)$。ここで、$h'(x) = 2x,\ g'(X) = 9X^8$ だから、$f'(x) = 9(h(x))^8(2x) = 18x(x^2+1)^8$. となる。

2. $\int (x^2+1)^9 dx = F(x) + C$ (C は積分定数) とするとき、$F'(x)$ を求めよ。

   解：不定積分の意味は、$(x^2+1)^9$ の原始関数全体をあらわすもので、$F(x)$ は原始関数の一つであった。原始関数は微分したら、$(x^2+1)^9$ になるものだったから、$F'(x) = (x^2+1)^9$。

3. $\int x(x^2+1)^8 dx$ を求めよ。

   解：微分したら、$x(x^2+1)^8$ になるもの、すなわち、$x(x^2+1)^8$ の原始関数を求めなければいけない。しかし、最初の問題から、導関数が、$18x(x^2+1)^8$ となるものは分かっている。そこで、

$$\int x(x^2+1)^8 dx = \frac{1}{18}\int 18x(x^2+1)^8 dx = \frac{1}{18}(x^2+1)^9 + C.$$

4. 次の計算をせよ。

   (a) $\displaystyle\int (4x^3 - x^2 + 6x - 1)dx = \frac{4}{3+1}x^{3+1} - \frac{1}{2+1}x^{2+1} + \frac{6}{1+1}x^{1+1} - x + C$

   $\displaystyle = x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - x + C.$

   (b) $\displaystyle\int (\frac{6}{x^4} + \sqrt{x})dx = \int (6x^{-4} + x^{1/2})dx = \frac{6}{-4+1}x^{-4+1} + \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C$

   $\displaystyle = -2x^{-3} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{x^3} + \frac{2}{3}(\sqrt{x})^3 + C.$

   (c) $\displaystyle\int (\frac{1}{x} + 2e^{-2x})dx = \log x - e^{-2x} + C.$

   $(e^{-2x})' = -2e^{-2x}$ となっていることに注意して下さい。

5. $p(x), q(x), r(x), s(x)$ についての記述のうちで正しいのはどれか。簡単に理由を記せ。

   解：(c) $r'(x) = s(x),\ s'(x) = p(x),\ p'(x) = q(x)$.

   [理由]

   一般に $f'(x) = g(x)$ とすると、$f(x)$ が $x = a$ で極大や極小のとき、$f'(a) = g(a) = 0$ となっている。また、$g(x) > 0$ のところでは、$f(x)$ は増加、$g(x) < 0$ のところでは、$f(x)$ は減少である。

   この考え方から、$p'(x) = q(x)$ であることが分かる。$q'(x)$ となるものはない。これで、消去法で、(c) だけが可能である。他も確かめると、たしかに、条件を満たしている。

   一つ一つの条件を丁寧に確認してみて下さい。

Quiz 8

Division: **ID#:** **Name:**

1. $f(x) = e^{-5x^2}$ の導関数を求めよ。

2. $F(x) = \int_0^x e^{-5x^2} dx$ とするとき、$F'(x)$ を求めよ。

3. $\int_0^1 x \cdot e^{-5x^2} dx$ を求めよ。

4. 次の計算をせよ。

   (a) $\int_{-1}^{1} (4x^3 - 3x^2 + 2x - 1) dx$

   (b) $\int_1^4 \left(\frac{-3}{x^4} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$

   (c) $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - 10e^{-5x} \right) dx$

5. $y = f(x)$ とし、次は x 年後の日本の人口の推移を予測する一つのモデルを表す微分方程式である。

$$y' = \frac{dy}{dx} = k \cdot x \cdot y \qquad (k \text{ は定数}),\ f(0) = 127,710,000.$$

   (a) この微分方程式を解き、$y = f(x)$ を求めよ。

   (b) $k = -0.0002$ として、このモデルを用いて、100 年後の人口を予測せよ。必要なら $e = 2.7$ を用いよ。

Message 欄（裏にもどうぞ）: 聖書を読んだことがありますか。キリスト教について、ICU の「C」について。(「ホームページ掲載不可」の場合は明記のこと。)

Solutions to Quiz 8

1. $f(x) = e^{-5x^2}$ の導関数を求めよ。
   解：$h(x) = -5x^2$, $g(X) = e^X$ とすると $f(x) = g(h(x))$ だから、
   $$f'(x) = g'(h(x))h'(x) = e^{-5x^2} \cdot (-5x^2)' = -10x \cdot e^{-5x^2}.$$

2. $F(x) = \int_0^x e^{-5x^2} dx$ は e^{-5x^2} の原始関数の一つだから、$F'(x) = e^{-5x^2}$。

3. $\int_0^1 x \cdot e^{-5x^2} dx = -\frac{1}{10} \int_0^1 (-10x \cdot e^{-5x^2}) dx = -\frac{1}{10} \left[e^{-5x^2} \right]_0^1 = -\frac{1}{10}(e^{-5} - 1).$

4. 次の計算をせよ。

   (a) $\int_{-1}^1 (4x^3 - 3x^2 + 2x - 1) dx$
   $$= \left[x^4 - x^3 + x^2 - x \right]_{-1}^1 = (1 - 1 + 1 - 1) - (1 + 1 + 1 + 1) = -4.$$

   (b) $\int_1^4 \left(\frac{-3}{x^4} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \int_1^4 \left(-3x^{-4} + x^{-1/2} \right) dx$
   $$= \left[\frac{-3}{-4+1} x^{-4+1} + \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-1/2+1} \right]_1^4 = \left[\frac{1}{x^3} + 2\sqrt{x} \right]_1^4 = \frac{1}{64} + 4 - 1 - 2 = \frac{65}{64}.$$

   (c) $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - 10e^{-5x} \right) dx = \left[\log x + 2e^{-5x} \right]_1^2 = \log 2 + 2e^{-10} - 2e^{-5}$

5. $y = f(x)$ とし、次は x 年後の日本の人口の推移を予測する一つのモデルを表す微分方程式である。
   $$y' = \frac{dy}{dx} = k \cdot x \cdot y \qquad (k \text{ は定数}),\ f(0) = 127,710,000.$$

   (a) この微分方程式を解き、$y = f(x)$ を求めよ。解：
   $$\int \frac{1}{y} dy = \int k \cdot x dx \text{ より } \log y = \frac{k}{2} x^2 + C.$$
   従って、$f(x) = y = e^{kx^2/2+C}$。$f(0) = e^C$ だから $f(x) = 127710000e^{kx^2/2}$.

   (b) $k = -0.0002$ として、このモデルを用いて、100 年後の人口を予測せよ。必要なら $e = 2.7$ を用いよ。
   解：$x = 100$ のとき、$kx^2/2 = -0.0002 \cdot 10000/2 = -1$. だから
   $$f(100) = 127710000e^{-1} \sim 127710000/2.7 = 47,300,000.$$