Quiz 1

Division: **ID#:** **Name:**

1. p, q, r を命題とする。このとき、次の式が成り立つかどうかを、下の真理表を完成することによって判定せよ。理由も記せ。

$$p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (\neg(p \wedge r)) \Rightarrow q.$$

p	q	r	$p \quad \Rightarrow \quad (q \quad \vee \quad r)$	$(\neg \quad (p \quad \wedge \quad r)) \quad \Rightarrow \quad q$
T	T	T		
T	T	F		
T	F	T		
T	F	F		
F	T	T		
F	T	F		
F	F	T		
F	F	F		

[**判定と理由**]

2. p と q を命題とするとき $p \downarrow q$ を下の真理表で表される真理値をもつ命題とする。

   (a) このとき、$p \downarrow p$ の真理表を完成せよ。

p	q	$p \downarrow q$	$p \downarrow p$
T	T	F	
T	F	F	
F	T	F	
F	F	T	

   (b) $p \downarrow q$ と等値（論理同値）な命題を $\neg$ と $\vee$ と 括弧だけを用いて表せ。

   (c) $p \vee q$ と等値（論理同値）な命題を $\downarrow$（と括弧）だけを用いて表せ。$p, q, \downarrow$ などは何度用いても良い。

Message 欄：将来の夢、25 年後の自分について、世界について。（「HP 掲載不可」は明記の事。）

Solutions to Quiz 1

1. p, q, r を命題とする。このとき、次の式が成り立つかどうかを、下の真理表を完成することによって判定せよ。理由も記せ。

$$p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (\neg(p \wedge r)) \Rightarrow q.$$

p	q	r	p	$\Rightarrow$	$(q$	$\vee$	$r)$	$(\neg$	$(p$	$\wedge$	$r))$	$\Rightarrow$	q
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	F	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T
T	T	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	F	T	T	F	F	$\boldsymbol{T}$	T
T	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	T	F	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	F
T	F	F	T	$\boldsymbol{F}$	F	F	F	T	T	F	F	$\boldsymbol{F}$	F
F	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	T	F	F	T	$\boldsymbol{T}$	T
F	T	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	T	F	T	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	T
F	F	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	T	T	F	F	T	$\boldsymbol{F}$	F
F	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	F	F	F	T	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	F

[**判定と理由**]

p, q の真理値がいずれも F のとき上の真理表のように $p \Rightarrow (q \vee r)$ の真理値は常に T であるが、$(\neg(p \wedge r)) \Rightarrow q$ の真理値は F で異なる真理値を取るため、等値（論理同値）ではない。したがって $p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (\neg(p \wedge r)) \Rightarrow q$ は成立しない。（それぞれの式の真理値が一箇所でも食い違っていたら等値とは言わない。すなわち、上の式は成立しない。）

2. p と q を命題とするとき $p \downarrow q$ を下の真理表で表される真理値をもつ命題とする。

(a) このとき、$p \downarrow p$ の真理表を完成せよ。

p	q	$p \downarrow q$	$p \downarrow p$
T	T	F	$\boldsymbol{F}$
T	F	F	$\boldsymbol{F}$
F	T	F	$\boldsymbol{T}$
F	F	T	$\boldsymbol{T}$

これは次の事を意味している事に注意。

$$p \downarrow p \equiv \neg p.$$

(b) $p \downarrow q$ と等値（論理同値）な命題を $\neg$ と $\vee$ と 括弧だけを用いて表せ。
解：$p \downarrow q$ の真理値は $p \vee q$ の真理値を逆にしたものだから、

$$p \downarrow q \equiv \neg(p \vee q).$$

または、T の位置に注意し（正規表現を用い）$\neg, \wedge, \vee$ で表してから ドモルガンを用いて、$\wedge$ を $\neg$ と $\vee$ で書き替えると

$$p \downarrow q \equiv (\neg p) \wedge (\neg q) \equiv \neg(p \vee q).$$

(c) $p \vee q$ と等値（論理同値）な命題を $\downarrow$ （と括弧）だけを用いて表せ。$p, q, \downarrow$ などは何度用いても良い。
解：前問より $\neg(p \vee q) \equiv p \downarrow q$ だから、(a) の注より

$$p \vee q \equiv \neg(p \downarrow q) \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q).$$

実は $p \wedge q \equiv (\neg p) \downarrow (\neg q) \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$ だから $\neg, \vee, \wedge$ すべて $\downarrow$ だけを用いて表すことができることもわかります。

Quiz 2

Division: **ID#:** **Name:**

行列の行に関する三つの基本変形をそれぞれ以下の記号で表すことにする。
$[i;c]$: 第 i 行を c 倍する (ただし $c \neq 0$). $[i,j]$: 第 i 行と第 j 行を交換する.
$[i,j;c]$: 第 i 行に第 j 行の c 倍を加える.

以下のようにある連立一次方程式の拡大係数行列に行に関する基本変形を施した。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & -3 & -7 & 1 & -10 \\ -3 & 6 & -2 & 1 & -4 & \mathbf{0} & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{(A)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & -4 & 0 & -3 & -7 & 1 & -10 \\ -3 & 6 & -2 & 1 & -4 & 0 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{(B)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -9 & 3 & -12 \\ -3 & 6 & -2 & 1 & -4 & 0 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{(C)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ -3 & 6 & -2 & 1 & -4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

1. (A), (B), (C) で行なっている行に関する基本変形を上の記号で書け。

   (A) $\boxed{}$ (B) $\boxed{}$ (C) $\boxed{}$

2. 最後 (4 つ目) の行列にさらに行に関する基本変形を何回か施して得られる、既約ガウス行列を書け。

3. この連立一次方程式の解 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ を求めよ。

4. この連立一次方程式の 4 番目方程式の x_6 の係数は 0 (太字のもの) だが、その数を 1 に変えた方程式について正しいものを (a)–(e) の中から選び番号を丸で囲め。

   (a) 解はない。(b) 解はただ一つ。(c) 解は無限個、パラメター一個で表せる。

   (d) 解は無限個、パラメター二個で表せる。(e) (a)-(d) のいずれでもない。

Message 欄（裏にもどうぞ）: あなたにとって一番たいせつな（または、たいせつにしたい）もの、ことはなんですか。(「HP 掲載不可」は明記の事。)

Solutions to Quiz 2

以下のようにある連立一次方程式の拡大係数行列に行に関する基本変形を施した。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & -3 & -7 & 1 & -10 \\ -3 & 6 & -2 & 1 & -4 & \mathbf{0} & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{(A)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & -4 & 0 & -3 & -7 & 1 & -10 \\ -3 & 6 & -2 & 1 & -4 & 0 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{(B)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -9 & 3 & -12 \\ -3 & 6 & -2 & 1 & -4 & 0 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{(C)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ -3 & 6 & -2 & 1 & -4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

1. (A), (B), (C) で行なっている行に関する基本変形を記号で書け。

   (A) $\boxed{[1,2]}$　(B) $\boxed{[3,1;-2]}$　(C) $\boxed{[3;-1/3]}$

2. 最後 (4 つ目) の行列にさらに行に関する基本変形を何回か施して得られる、既約ガウス行列を書け。

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ -3 & 6 & -2 & 1 & -4 & 0 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{[4,1;3]} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & -3 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{[4,2;2]}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{[4,3;-1]} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. この連立一次方程式の解 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ を求めよ。

   解：$x_2 = t_1, x_5 = t_2, x_6 = t_3$ とおく。すると、

$$\begin{aligned} x_1 &= 2t_1 - t_2 + t_3 + 1, & x_2 &= t_1, & x_3 &= -2t_2 - t_3 - 3 \\ x_4 &= -3t_2 + t_4 + 4, & x_5 &= t_2, & x_6 &= t_3. \end{aligned}$$

4. この連立一次方程式の 4 番目方程式の x_6 の係数は 0 (太字のもの) だが、その数を 1 に変えた方程式について正しいものを (a)–(e) の中から選び番号を丸で囲め。

   (a) 解はない。(b) 解はただ一つ。(c) 解は無限個、パラメター一個で表せる。

   (d) 解は無限個、パラメター二個で表せる。(e) (a)-(d) のいずれでもない。

   解：同じ変形をすると、最後の二つは、

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{[4,3;-1]} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   このあと変形をすると、拡大係数行列の階数も、係数行列の階数もともに 4 であることがわかるので、解は無限個で、パラメター二個となる。すなわち、(d) である。

Quiz 3

Division: **ID#:** **Name:**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & -6 & 5 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とし（注：$C = [A\,I]$）以下の様にして行列 A の逆行列を求める。

$$C \to C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to C_2 \to C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \cdots$$

ここで、C にある行列 S を左からかけると C_1 が得られ、C_1 に 行列 T を左からかけると C_2、C_2 に行列 U を左からかけると C_3 が得られるとする。

1. 行列 S の逆行列 S^{-1} を求めよ。

2. 行列 U と T の積 UT を求めよ。

3. 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ。

4. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ とするとき、A の逆行列を用いて x, y, z を求めよ。

Message 欄（裏にもどうぞ）：今までで一番嬉しかった（感謝している）こと、悲しかったこと、今、怒っていること。今年の抱負。（「ホームページ掲載不可」は明記のこと。）

Solutions to Quiz 3

$$C \to C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to C_2 \to C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \cdots$$

ここで、C にある行列 S を左からかけると C_1 が得られ、C_1 に 行列 T を左からかけると C_2、C_2 に行列 U を左からかけると C_3 が得られるとする。

解：それぞれのステップで基本変形、$[1,2], [2,1;-2], [3,1;2]$ を順に施したことがわかる。（$[1,2], [3,1;2], [2,1;-2]$ とも考えられる。）

1. 行列 S の逆行列 S^{-1} を求めよ。

   解：$S = P(1,2)$ は、$C_1 = SC = S[A, I] = [SA, S]$ より C_1 の右半分の行列だから、

   $$[S, I] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = S$$

   となる。

2. 行列 U と T の積 UT を求めよ。

   解：T は左からかけると $[2,1;-2]$, U は左からかけると、$[3,1;2]$ で表される行に関する変形をするのだから、$UT = UTI$ より I に $[2,1;-2]$、$[3,1;2]$ を順に施した得られる行列が UT である。従って、

   $$UT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ または、 } UT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   を計算しても得られる。

3. 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ。

   解：C_3 にさらに、$[1,2;-3]$, $[1,3;-1]$, $[2,3;1]$ を順に施すと、

   $$C_3 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

   $$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 従って } A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ とするとき、A の逆行列を用いて x, y, z を求めよ。

   解：$\boldsymbol{x} = I\boldsymbol{x} = A^{-1}A\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ だから $\boldsymbol{b}$ に 上で求めた A^{-1} をかければよい。

   $$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & -2 \\ y & = & 0 \\ z & = & -1 \end{array} \right. .$$

Quiz 4

Division: **ID#:** **Name:**

1. $f(x)$, $g(x)$ を多項式で $\deg(f(x)) = 10$, $\deg(g(x)) = 3$ とする。このとき、多項式 $q(x)$, $r(x)$ で $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ かつ $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$ となるものが存在するが、この時、$\deg(q(x))$ を求めよ。理由も述べること。

2. 次数が 3 の多項式 $Q(x)$ で $Q(2) = 0$, $Q(4) = 0$, $Q(6) = 1$, $Q(8) = 0$ となるものを一つかけ。

3. $h(x) = a(x-4)(x-6)(x-8) + b(x-2)(x-6)(x-8) + c(x-2)(x-4)(x-8) + d(x-2)(x-4)(x-6)$ は、$h(2) = 96$, $h(4) = -16$, $h(6) = 6$, $h(8) = -1$ を満たすとする。このとき、a, b, c, d を求めよ。

4. $h(x)$ を前問の多項式とする。このとき、$f(2) = h(2)$, $f(4) = h(4)$, $f(6) = h(6)$, $f(8) = h(8)$ となる多項式で $f(0) = h(0)$ かつ $\deg f(x) = 5$ となるものを一つ書け。$h(x)$ を用いて書いても良い。

5. 前問の条件を満たす５次の多項式は無限個存在するか。理由も記せ。

Message 欄（裏にもどうぞ）：どんなおとなが魅力的ですか。こどもの魅力は何でしょう。

Solutions to Quiz 4

1. $f(x)$, $g(x)$ を多項式で $\deg(f(x)) = 10$, $\deg(g(x)) = 3$ とする。このとき、多項式 $q(x)$, $r(x)$ で $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ かつ $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$ となるものが存在するが、この時、$\deg(q(x))$ を求めよ。理由も述べること。

   解：$\deg(q(x)) = 7$. 条件より $\deg(r(x)) < \deg(g(x)) = 3$ である。$\deg(f(x)) = 10$ だから $\deg(f(x) - r(x)) = 10$ である。（$f(x)$ の 10 次の項は $r(x)$ を引いても変化しないから。）ここで、Theorem 5.1(1) を用いると

   $$10 = \deg(f(x) - r(x)) = \deg(q(x)g(x)) = \deg(q(x)) + \deg(g(x)) = \deg(q(x)) + 3.$$

   これより、$\deg(q(x)) = 7$ を得る。 ■

2. 次数が 3 の多項式 $Q(x)$ で $Q(2) = 0$, $Q(4) = 0$, $Q(6) = 1$, $Q(8) = 0$ となるものを一つかけ。

   解：多項式は一つのみです。無論、最初の形で十分です。

   $$Q(x) = \frac{(x-2)(x-4)(x-8)}{(6-2)(6-4)(6-8)} = -\frac{(x-2)(x-4)(x-8)}{16} = -\frac{x^3}{16} + \frac{7x^2}{8} - \frac{7x}{2} + 4.$$

3. $h(x) = a(x-4)(x-6)(x-8) + b(x-2)(x-6)(x-8) + c(x-2)(x-4)(x-8) + d(x-2)(x-4)(x-6)$ は、$h(2) = 96$, $h(4) = -16$, $h(6) = 6$, $h(8) = -1$ を満たすとする。このとき、a, b, c, d を求めよ。

   解：$a = -2$, $b = -1$, $c = -3/8$, $d = -1/48$.

   $$\begin{aligned} h(x) &= 96\frac{(x-4)(x-6)(x-8)}{(2-4)(2-6)(2-8)} - 16\frac{(x-2)(x-6)(x-8)}{(4-2)(4-6)(4-8)} \\ &\quad + 6\frac{(x-2)(x-4)(x-8)}{(6-2)(6-4)(6-8)} - \frac{(x-2)(x-4)(x-6)}{(8-2)(8-4)(8-6)}. \end{aligned}$$

4. $h(x)$ を前問の多項式とする。このとき、$f(2) = h(2)$, $f(4) = h(4)$, $f(6) = h(6)$, $f(8) = h(8)$ となる多項式で $f(0) = h(0)$ かつ $\deg f(x) = 5$ となるものを一つ書け。$h(x)$ を用いて書いても良い。

   解：

   $$f(x) = h(x) + x(x-2)(x-4)(x-6)(x-8).$$

5. 前問の条件を満たす５次の多項式は無限個存在するか。理由も記せ。

   解：

   $$f(x) = h(x) + ax(x-2)(x-4)(x-6)(x-8).$$

   ここで、a はゼロでない数とすれば、すべて条件を満たすので、無限個存在する。■

Quiz 5

Division: **ID#:** **Name:**

1. 次の極限を求めよ。極限がない場合はその理由も書いて下さい。途中の式も略さずに。(Show work !)

   (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-2}{2-3n^2}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2+9}{x+3}$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2+9}{x-3}$

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$

2. $6x^4-23x^3+19x^2+8x-4=a(x-2)^4+b(x-2)^3+c(x-2)^2+d(x-2)+e$ とするとき a,b,c,d,e を求めよ。

3. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{6x^4-23x^3+19x^2+8x-4}{x^4-3x^3+2x^2-4x+8}$ を求めよ。途中の式も略さずに。

Message 欄（裏にもどうぞ）: 国際人（World Citizen）とは。ICU のそして自分の「国際性」にとって必要なこと。（「ホームページ掲載不可」の場合は明記のこと。）

Solutions to Quiz 5

1. 次の極限を求めよ。極限がない場合はその理由も書いて下さい。途中の式も略さずに。(Show work !)

   (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-2}{2-3n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}}{\frac{2}{n^2}-3}=\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}.$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2+9}{x+3}=\frac{18}{6}=3.$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2+9}{x-3}$: 分母は 0 に近づき、分子は 0 ではない値に近づくので、極限は存在しない。

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}x+3=6.$

2. $6x^4-23x^3+19x^2+8x-4=a(x-2)^4+b(x-2)^3+c(x-2)^2+d(x-2)+e$ とするとき a,b,c,d,e を求めよ。

2	6	-23	19	8	-4
		12	-22	-6	4
2	6	-11	-3	2	$\boxed{0\ (e)}$
		12	2	-2	
2	6	1	-1	$\boxed{0\ (d)}$	
		12	26		
2	6	13	$\boxed{25\ (c)}$		
		12			
2	$6\ (a)$	$\boxed{25\ (b)}$			

2	1	-3	2	-4	8
		2	-2	0	-8
2	1	-1	0	-4	$\boxed{0}$
		2	2	4	
2	1	1	2	$\boxed{0}$	
		2	6		
2	1	3	$\boxed{8}$		
		2			
2	1	$\boxed{5}$			

   $a=6,\ b=25,\ c=25,\ d=e=0.$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{6x^4-23x^3+19x^2+8x-4}{x^4-3x^3+2x^2-4x+8}$ を求めよ。途中の式も略さずに。

   解：右上の組み立て除法から、

$$\lim_{x\to 2}\frac{6x^4-23x^3+19x^2+8x-4}{x^4-3x^3+2x^2-4x+8}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{6(x-2)^4+25(x-2)^3+25(x-2)^2}{(x-2)^4+5(x-2)^3+8(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\frac{6(x-2)^2+25(x-2)+25}{(x-2)^2+5(x-2)+8}=\frac{25}{8}.$$

   別解：

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 2}\frac{6x^4-23x^3+19x^2+8x-4}{x^4-3x^3+2x^2-4x+8}\\ &=\lim_{x\to 2}\frac{(6x^3-11x^2-3x+2)(x-2)}{(x^3-x^2-4)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{6x^3-11x^2-3x+2}{x^3-x^2-4}\\ &=\lim_{x\to 2}\frac{(6x^2+x-1)(x-2)}{(x^2+x+2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{6x^2+x-1}{x^2+x+2}=\frac{25}{8}.\end{aligned}$$

Quiz 6

Division: **ID#:** **Name:**

1. 次の関数 $y = f(x)$ の導関数を求めよ。(No need to simplify!)

   (a) $y = \dfrac{3x-1}{x^2+1}$

   (b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x^4} + 2\log x + 2x\sqrt{x}$, $(x > 0)$

   (c) $y = (x^3 - 3x + 3)^{100}$

   (d) $y = xe^{-2x}$

   (e) $g'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ であるとき、$y = g(e^x)$

2. $f(x) = \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{7}{4}x^4 + 5x^3 - \dfrac{9}{2}x^2 - \dfrac{9}{7}$ とする。

   $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ とその導関数 $f''(x)$ を求め、$x = 1, 2$ および 3 のとき、$f(x)$ は増加か、減少か、極大か、極小かを決定し簡単に理由も記せ。(Show work!)

   (a) $f'(x) =$

   (b) $f''(x) =$

   (c) $x = 1$

   (d) $x = 2$

   (e) $x = 3$

Message 欄（裏にもどうぞ）: 聖書を読んだことがありますか。キリスト教について、ICU の「C」について。(「ホームページ掲載不可」の場合は明記のこと。)

Solutions to Quiz 6

1. 次の関数 $y = f(x)$ の導関数を求めよ。(No need to simplify!)

   (a) $y = \dfrac{3x-1}{x^2+1}$　解：商の微分を用いる。

   $$y' = \frac{(3x-1)'(x^2+1) - (3x-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{3(x^2+1) - (3x-1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-3x^2+2x+3}{(x^2+1)^2}$$

   (b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x^4} + 2\log x + 2x\sqrt{x}$, $(x > 0)$　解：$\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$, $\frac{1}{x^4} = x^{-4}$, $x\sqrt{x} = x^{3/2}$ より、

   $$y' = -\frac{1}{2}x^{-3/2} - (-4)x^{-5} + 2\frac{1}{x} + 2\frac{3}{2}x^{1/2} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{4}{x^5} + \frac{2}{x} + 3\sqrt{x}.$$

   (c) $y = (x^3 - 3x + 3)^{100}$　解：$g(x) = x^3 - 3x + 3$, $h(x) = x^{100}$ とすると、$f(x) = h(g(x))$ だから、

   $$f'(x) = h'(g(x))g'(x) = 100(x^3 - 3x + 3)^{99}(3x^2 - 3) = 300(x^3 - 3x + 3)^{99}(x^2 - 1).$$

   (d) $y = xe^{-2x}$　解：積の微分を用いる。e^{-2x} に関しては $g(x) = -2x$, $h(x) = e^x$ とすると $h(g(x))$ だから合成関数の微分を用い、$(e^{-2x})' = e^{-2x}(-2x)' = -2e^{-2x}$.

   $$y' = (x)'e^{-2x} + x(e^{-2x})' = e^{-2x} + xe^{-2x}(-2) = (1-2x)e^{-2x}.$$

   (e) $g'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ であるとき、$y = g(e^x)$　解：合成関数の微分を用いて

   $$y' = g'(e^x)(e^x)' = \frac{1}{(e^x)^2+1}e^x = \frac{e^x}{e^{2x}+1}.$$

2. $f(x) = \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{7}{4}x^4 + 5x^3 - \dfrac{9}{2}x^2 - \dfrac{9}{7}$ とする。

   $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ とその導関数 $f''(x)$ を求め、$x = 1, 2$ および 3 のとき、$f(x)$ は増加か、減少か、極大か、極小かを決定し簡単に理由も記せ。(Show work!)

   (a) $f'(x) = x^4 - 7x^3 + 15x^2 - 9x.$

   (b) $f''(x) = 4x^3 - 21x^2 + 30x - 9.$

   (c) $x = 1$: $f'(1) = 0$, $f''(1) = 4 > 0$ だから $f'(x)$ は $x = 1$ で増加よって、$x < 1$ で $f'(x) < 0$, $f'(1) = 0$, $x > 1$ で $f'(x) > 0$ となる。したがって $f(x)$ は $x = 1$ で減少から増加に変化する。すなわち、$x = 1$ で <u>極小</u>。

   (d) $x = 2$: $f'(2) = 16 - 56 + 60 - 18 = 2 > 0$ だから $f(x)$ は $x = 2$ で <u>増加</u>。

   (e) $x = 3$: $f'(3) = f''(3) = 0$。ここで $f'''(x) = 12x^2 - 42x + 30$ で $f'''(3) = 12 > 0$ だから $f''(x)$ は $x = 3$ で増大。よって負から正にかわる。したがって、$f'(x)$ は減少から増加。よって $x = 3$ の付近で $x \neq 3$ のとき、常に正。したがって、$f(x)$ は $x = 3$ で <u>増加</u>。