Quiz 1

ID#: **Name:**

p, q, r を命題、x, y, z を p, q, r の結合命題とする。Let p, q and r be statements, and x, y and z compound statements of p, q and r.

1. 下の真理表を完成せよ。Complete the truth table below.

p	q	r	$(p \wedge q) \Rightarrow \neg r$	$p \Rightarrow (\neg q \vee \neg r)$	x	y	z
T	T	T			T	F	F
T	T	F			T	F	T
T	F	T			T	F	F
T	F	F			T	F	F
F	T	T			T	F	F
F	T	F			T	F	F
F	F	T			F	T	T
F	F	F			T	F	F

2. $s \equiv (p \wedge q) \Rightarrow \neg r$, $t \equiv p \Rightarrow (\neg q \vee \neg r)$. 正しいものを選べ。Choose the correct one.
   (a) $s \equiv t$ (b) $s \equiv \neg t$ (c) どちらでもない。Neither (a) nor (b).

3. $s \equiv (p \wedge q) \Rightarrow \neg r$ と論理同値な命題を $\neg$ と $\vee$ と 括弧だけを用いて表せ。Express s using $\neg$, $\vee$ and parentheses only.

4. 上の真理表の x、y および z を表す論理式になるように、下の 下線の部分に、$\neg$, $\wedge$, または、$\vee$ を入れよ。空欄となる箇所があるかも知れない。(Fill each underlined blank with $\neg$, $\wedge$ or $\vee$ to express x, y and z in the truth table above. There may be voids.)

$$
\begin{aligned}
x &\equiv ((\_\_\ p) \vee (\_\_\ q))\ \_\_\ (\_\_\ r), \\
y &\equiv ((\_\_\ p)\ \_\_\ (\_\_\ q))\ \_\_\ (\_\_\ r), \\
z &\equiv y\ \_\_(((\_\_\ p) \wedge (\_\_\ q))\ \_\_\ (\_\_\ r)).
\end{aligned}
$$

Message 欄：将来の夢、25 年後の自分について、世界について。What is your dream? Describe your vision of yourself and the world 25 years from now.（「HP 掲載不可」は明記の事。If you don't want your message to be posted, write "Do Not Post."）

Solutions to Quiz 1

p, q, r を命題、x, y, z を p, q, r の結合命題とする。Let p, q and r be statements, and x, y and z compound statements of p, q and r.

1. 下の真理表を完成せよ。Complete the truth table below.

p	q	r	$(p \quad \wedge \quad q)$	$\Rightarrow$	$\neg r$	p	$\Rightarrow$	$(\neg q$	$\vee$	$\neg r)$	x	y	z
T	T	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	T	$\boldsymbol{F}$	F	F	F	T	F	F
T	T	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	T	T	F	T
T	F	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	F	T	F	F
T	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	T	F	F
F	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	F	$\boldsymbol{T}$	F	F	F	T	F	F
F	T	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	T	T	F	F
F	F	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	T	F	F	T	T
F	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	T	F	F

2. $s \equiv (p \wedge q) \Rightarrow \neg r$, $t \equiv p \Rightarrow (\neg q \vee \neg r)$. 正しいものを選べ。Choose the correct one.

   $\boxed{\text{(a) } s \equiv t}$ (b) $s \equiv \neg t$ (c) どちらでもない。Neither (a) nor (b).

3. $s \equiv (p \wedge q) \Rightarrow \neg r$ と論理同値な命題を $\neg$ と $\vee$ と 括弧だけを用いて表せ。Express s using $\neg$, $\vee$ and parentheses only.

   Use $x \Rightarrow y \equiv \neg x \vee y$ and $x \wedge y \equiv \neg(\neg x \vee \neg y)$.

$$\neg p \vee (\neg q \vee \neg r) \equiv (\neg p \vee \neg q) \vee \neg r \equiv \neg p \vee \neg q \vee \neg r.$$

   1. $s \equiv (p \wedge q) \Rightarrow \neg r \equiv \neg(p \wedge q) \vee \neg r \equiv (\neg p \vee \neg q) \vee \neg r$.
   2. $s \equiv t \equiv p \Rightarrow (\neg q \vee \neg r) \equiv \neg p \vee (\neg q \vee \neg r)$.
   3. There is only one F at (TTT), $s \equiv (\neg p) \vee (\neg q) \vee (\neg r)$.

4. 上の真理表の x、y および z を表す論理式になるように、下の 下線の部分に、$\neg$, $\wedge$, または、$\vee$ を入れよ。空欄となる箇所があるかも知れない。(Fill each underlined blank with $\neg$, $\wedge$ or $\vee$ to express x, y and z in the truth table above. There may be voids.)

$$\begin{aligned} x &\equiv (((\underline{\quad} \, p) \ \vee \ ((\underline{\quad} \, q)) \ \underline{\ \vee\ } \ (\underline{\ \neg\ } \, r), \\ y &\equiv ((\underline{\ \neg\ } \, p) \ \underline{\ \wedge\ } \ (\underline{\ \neg\ } \, q)) \ \underline{\ \wedge\ } \ (\underline{\quad} \, r), \\ z &\equiv y \ \underline{\ \vee\ } (((\underline{\quad} \, p) \ \wedge \ (\underline{\quad} \, q)) \ \underline{\ \wedge\ } \ (\underline{\ \neg\ } \, r)). \end{aligned}$$

   Since $x \equiv \neg y$, $x \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \equiv p \vee q \vee \neg r$.

Quiz 2

ID#: **Name:**

基本行変形を以下の記号で表すことにする。Let $[i,j;c]$, $[i,j]$, $[i;c]$ be the following elementary row operations. (1) $[i,j;c]$: 第 i 行に第 j 行の c 倍を加える. Replace row i by the sum of row i and c times row j. (2) $[i,j]$: 第 i 行と第 j 行を交換する. Interchange row i and row j. (3) $[i;c]$: 第 i 行を c 倍する (ただし $c \neq 0$). Multiply all entries in row i by a nonzero constant c.

以下のようにある連立一次方程式の拡大係数行列 A に行に関する基本変形を施した。We applied elementary row operations to the augmented matrix A of a system of linear equations.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 & -8 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & -1 & 18 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & -6 & 1 & -10 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & -1 & 18 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & -6 & 1 & -10 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -8 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(b)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 8 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & -6 & 1 & -10 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -8 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 8 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -8 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. (a), (b), (c) で行なっている行に関する基本変形を上の記号で書け。Write elementary row operations at (a), (b), (c) in the form $[i,j;c]$, $[i,j]$, or $[i;c]$.

   (a) $\boxed{}$ (b) $\boxed{}$ (c) $\boxed{}$

2. 最後 (4 つ目) の行列にさらに行に関する基本変形を何回か施して得られる、既約ガウス行列を <u>途中経過も含めて</u> 書け。Find the reduced echelon form of A by applying elementary row operations to the fourth matrix above. <u>Show work!</u>

3. この連立一次方程式の拡大係数行列 A と係数行列 C の階数はいくつか。Find the rank of the augmented matrix A of the system of linear equations, and the rank of the coefficient matrix C.

   (a) rank $A =$ (b) rank $C =$

4. この連立一次方程式の解 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ を求めよ。Find the solutions.

Message 欄（裏にもどうぞ）：あなたにとって一番たいせつな（または、たいせつにしたい）もの、ことはなんですか。What is most precious to you?（「HP 掲載不可」は明記の事。If you don't want your message to be posted, write "Do Not Post."）

Solutions to Quiz 2

基本行変形を以下の記号で表すことにする。Let $[i,j;c]$, $[i,j]$, $[i;c]$ be the following elementary row operations. (1) $[i,j;c]$: 第 i 行に第 j 行の c 倍を加える. Replace row i by the sum of row i and c times row j. (2) $[i,j]$: 第 i 行と第 j 行を交換する. Interchange row i and row j. (3) $[i;c]$: 第 i 行を c 倍する (ただし $c \neq 0$). Multiply all entries in row i by a nonzero constant c.

以下のようにある連立一次方程式の拡大係数行列 A に行に関する基本変形を施した。We applied elementary row operations to the augmented matrix of a system of linear equations.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 & -8 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & -1 & 18 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & -6 & 1 & -10 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & -1 & 18 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & -6 & 1 & -10 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -8 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(b)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 8 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & -6 & 1 & -10 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -8 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 8 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -8 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. (a), (b), (c) で行なっている行に関する基本変形を上の記号で書け。Write operations in the form $[i,j;c]$, $[i,j]$, or $[i;c]$.

   (a) $\boxed{[1,4]}$ (b) $\boxed{[2,3;1]}$ (c) $\boxed{[3,1;3]}$

2. 最後 (4 つ目) の行列にさらに行に関する基本変形を何回か施して得られる、既約ガウス行列を途中経過も含めて書け。Find the reduced echelon form of A by applying elementary row operations to the fourth matrix above. Show work!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 8 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -8 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{[4,2;1]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 8 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{[4;1/2]}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 8 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{[2,4;-1]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 8 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

3. この連立一次方程式の拡大係数行列 A と係数行列 C の階数はいくつか。Find the rank of the augmented matrix A of the system of linear equations, and the rank of the coefficient matrix C.

   解：階数 (rank) はその行列を既約ガウス行列に変形したときの すべては 0 ではない行の数。係数行列は、拡大係数行列の最後の一列を除いたもの。

   (a) rank $A = 4$ (b) rank $C = 4$

4. この連立一次方程式の解 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ を求めよ。

   解：$x_3 = t, x_5 = u$ とおく。すると、

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_3 + 4x_5 & = & 3 \\ x_2 - 2x_3 + 8x_5 & = & -1 \\ x_4 + 2x_5 & = & 4 \\ x_6 & = & -1 \end{array}\right. \quad \text{より} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & -2t - 4u + 3 \\ x_2 & = & 2t - 8u - 1 \\ x_3 & = & t \\ x_4 & = & -2u + 4 \\ x_5 & = & u \\ x_6 & = & -1. \end{array}\right.$$

Quiz 3

ID#: **Name:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とし（注：$C = [A, I]$）以下の様にして行列 A の逆行列を求める。We will find the inverse of A.

$$C \to C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to C_2 \to C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \cdots$$

C から C_1, C_1 から C_2, C_2 から C_3 は一回ずつ基本変形を行っている。S, T, U は 3×3 の基本行列 (elementary matrices) で、$SC = C_1$, $TC_1 = C_2$, $UC_2 = C_3$ を満たすものとする。

1. 行列 S の逆行列 S^{-1} を求めよ。Find the inverse of S.

2. 行列 U と T の積 UT を求めよ。Find the product UT of matrices U and T.

3. 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ。Find the inverse A^{-1} of A.

4. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ とするとき、A の逆行列を用いて x, y, z を求めよ。Suppose $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Find x, y, z using the inverse of A.

Message 欄（裏にもどうぞ）：最近とても嬉しかった（感謝している）こと、悲しかったこと、怒っていること。Anything that made you rejoice, sad or angry, or you are thankful of recently?（「ホームページ掲載不可」は明記のこと。If you don't want your message to be posted, write "Do Not Post."）

Solutions to Quiz 3

$$C \to C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to C_2 \to C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \cdots$$

S, T, U は 3×3 行列 (matrices) で、$SC = C_1$, $TC_1 = C_2$, $UC_2 = C_3$ を満たすものとする。

解:それぞれのステップでの基本変形は、$[3, 2; 2], [3, 1; -2], [2, 3]$ を順に施したことがわかる。The corresponding elementary row operations are $[3, 2; 2], [3, 1; -2], [2, 3]$. (または $[3, 2; 2], [2, 3], [2, 1; -2]$) 従って $S = E(3, 2; 2)$, $T = E(3, 1; -2), U = E(2, 3)$ または $T = E(2, 3), U = E(2, 1; -2)$ の何れかである。S, T, U are all elementary matrices corresponding to each elementary row operations, $S = E(3, 2; 2)$ and either $T = E(3, 1; -2), U = E(2, 3)$ or $T = E(2, 3), U = E(2, 1; -2)$.

1. 行列 S の逆行列 S^{-1} を求めよ。Find the inverse of S.

   解：$S = E(3, 2; 2)$ は、$C_1 = SC = S[A, I] = [SA, S]$ より C_1 の右半分の行列だから、

$$[S, I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \ S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

   となる。Note that $S^{-1} = E(3, 2; -2)$.

2. 行列 U と T の積 UT を求めよ。Find the product UT of matrices U and T.

   解：$T = E(3, 1; -2)$, $U = E(2, 3)$ とする。T に $[2, 3]$ を施した得られる行列が UT である。直接計算すると以下の通り。The following are direct computations.

$$\begin{aligned} UT &= E(2,3)E(3,1;-2) \ (\text{or } E(2,1;-2)E(2,3)) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\text{or } = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

3. 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ。Find the inverse A^{-1} of A.

   解：C_3 にさらに、$[3, 1; 2]$, $[1, 2; -2]$, $[3, 2; -6]$ を順に施すと、

$$C_3 \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 14 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \text{従って } A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 14 & -11 & -6 \end{bmatrix}.$$

4. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ とするとき、A の逆行列を用いて x, y, z を求めよ。Suppose $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Find x, y, z using the inverse of A.

   解：$\boldsymbol{x} = I\boldsymbol{x} = A^{-1}A\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ だから $\boldsymbol{b}$ に 上で求めた A^{-1} をかければよい。Since $\boldsymbol{x} = I\boldsymbol{x} = A^{-1}A\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$, by multiplying A^{-1} to $\boldsymbol{b}$, we have the following.

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 14 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \ \begin{cases} x &= -1 \\ y &= 1 \\ z &= -3 \end{cases}.$$

Quiz 4

ID#: **Name:**

$f(x) = 2x^3 - 13x^2 + 25x - 14$ とする。Let $f(x) = 2x^3 - 13x^2 + 25x - 14$.

1. $f(x) = q(x)(x-3) + r$ となる多項式 $q(x)$ と 数 r を求めよ。 Find a polynomial $q(x)$ and a number r satisfying $f(x) = q(x)(x-3) + r$. Show work.

2. $f(x) = a + b(x-3) + c(x-3)^2 + d(x-3)^3$ としたとき a, b, c, d を求めよ。Find a, b, c, d.

3. 次数が 3 の多項式 $Q(x)$ で $Q(1) = 0$, $Q(3) = 1$, $Q(5) = 0$, $Q(7) = 0$ となるものを一つ書け。Find a polynomial $Q(x)$ of degree 3 such that $Q(1) = 0$, $Q(3) = 1$, $Q(5) = 0$, $Q(7) = 0$.

4. $h(x) = a(x-3)(x-5)(x-7)+b(x-1)(x-5)(x-7)+c(x-1)(x-3)(x-7)+d(x-1)(x-3)(x-5)$ は、$h(1) = -12$, $h(3) = -2$, $h(5) = 16$, $h(7) = 96$ を満たすとする。このとき、a, b, c, d を求めよ。 Find a, b, c, d when $h(1) = -12$, $h(3) = -2$, $h(5) = 16$, $h(7) = 96$.

5. $g(1) = -12$, $g(3) = -2$, $g(5) = 16$, $g(7) = 96$ を満たす多項式で次数が 5 のものと一つ書け。Find a polynomial of degree 5 satisfying $g(1) = -12$, $g(3) = -2$, $g(5) = 16$, $g(7) = 96$.

Message 欄（裏にもどうぞ）：どんなおとなが魅力的ですか。こどもの魅力は何でしょう。What kind of adult is admirable? What is admirable about children?「HP 掲載不可」は明記の事。If you don't want your message to be posted, write "Do Not Post.")

Solutions to Quiz 4

$f(x) = 2x^3 - 13x^2 + 25x - 14$ とする。Let $f(x) = 2x^3 - 13x^2 + 25x - 14$.

1. $f(x) = q(x)(x-3) + r$ となる多項式 $q(x)$ と 数 r を求めよ。 Find a polynomial $q(x)$ and a number r satisfying $f(x) = q(x)(x-3) + r$. Show work.

   解：下のように組み立て除法で求めると、Applying synthetic division

$$\begin{array}{c|cccc}
3 & 2 & -13 & 25 & -14 \\
 & & 6 & -21 & 12 \\
\hline
 & 2\ (c_2) & -7\ (c_1) & 4\ (c_0) & \boxed{-2\ (r)}
\end{array}$$

$$q(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0 = 2x^2 - 7x + 4, \qquad r = -2.$$

2. $f(x) = a + b(x-3) + c(x-3)^2 + d(x-3)^3$ としたとき a, b, c, d を求めよ。Find a, b, c, d.

   解：下の組み立て除法から、$d = 2, c = 5, b = 1, a = -2$ となります。

$$\begin{array}{c|ccc}
3 & 2 & -7 & 4 \\
 & & 6 & -3 \\
\hline
3 & 2 & -1 & \boxed{1\ (b)} \\
 & & 6 & \\
\hline
3 & 2\ (d) & \boxed{5\ (c)} &
\end{array}$$

$2x^2 - 7x + 4 = (2x-1)(x-3) + 1$, $2x - 1 = 2(x-3) + 5$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2x^3 - 13x^2 + 25x - 14 = (2x^3 - 7x + 4)(x-3) - 2 \\
&= ((2x-1)(x-3)+1)(x-3) - 2 = ((2(x-3)+5)(x-3)+1)(x-3) - 2 \\
&= -2 + (x-3) + 5(x-3)^2 + 2(x-3)^3
\end{aligned}$$

3. 次数が 3 の多項式 $Q(x)$ で $Q(1) = 0$, $Q(3) = 1$, $Q(5) = 0$, $Q(7) = 0$ となるものを一つ書け。 Find a polynomial $Q(x)$ of degree 3 such that $Q(1) = 0$, $Q(3) = 1$, $Q(5) = 0$, $Q(7) = 0$.

   解：

$$Q(x) = \frac{(x-1)(x-5)(x-7)}{(3-1)(3-5)(3-7)} = \frac{1}{16}(x-1)(x-5)(x-7) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{13}{16}x^2 + \frac{47}{16}x - \frac{35}{16}.$$

4. $h(x) = a(x-3)(x-5)(x-7) + b(x-1)(x-5)(x-7) + c(x-1)(x-3)(x-7) + d(x-1)(x-3)(x-5)$ は、$h(1) = -12$, $h(3) = -2$, $h(5) = 16$, $h(7) = 96$ を満たすとする。このとき、a, b, c, d を求めよ。 Find a, b, c, d when $h(1) = -12$, $h(3) = -2$, $h(5) = 16$, $h(7) = 96$.

解：
$$\begin{aligned}
-12 &= h(1) = a(1-3)(1-5)(1-7) = -48a, \quad a = \frac{1}{4}, \\
-2 &= h(3) = b(3-1)(3-5)(3-7) = 16b, \quad b = -\frac{1}{8}, \\
16 &= h(5) = c(5-1)(5-3)(5-7) = -16c, \quad c = -1 \\
96 &= h(7) = d(7-1)(7-3)(7-5) = 48d, \quad d = 2
\end{aligned}$$

5. $g(1) = -12$, $g(3) = -2$, $g(5) = 16$, $g(7) = 96$ を満たす多項式で次数が 5 のものを一つ書け。Find a polynomial of degree 5 satisfying $g(1) = -12$, $g(3) = -2$, $g(5) = 16$, $g(7) = 96$.

解：
$$\begin{aligned}
& h(x) + x(x-1)(x-3)(x-5)(x-7) \\
=\ & x(x-1)(x-3)(x-5)(x-7) + \frac{1}{4}(x-3)(x-5)(x-7) \\
& -\frac{1}{8}(x-1)(x-5)(x-7) - (x-1)(x-3)(x-7) + 2(x-1)(x-3)(x-5)
\end{aligned}$$

Quiz 5

ID#: **Name:**

1. 次の極限を求めよ。極限がない場合はその理由も書いて下さい。途中の式も略さずに。Find the limits of the following. If there is no limit, or diverge, briefly explain why. Show work!

   (a) $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{99}{100}\right)^n$

   (b) $\lim_{n\to\infty}\frac{1+3n^3}{1-5n^3}$

   (c) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n}{1-5n+2n^2-3n^3}$

   (d) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-2}{x+2}$

   (e) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-x-2}$

   (f) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-3}{x^2-x-2}$

2. $\lim_{x\to 2}\frac{x^4-3x^3-2x^2+12x-8}{x^3-2x^2-4x+8}$ を求めよ。途中の式も略さずに。Find the limit. Show work.

3. $f(x)=q(x)(x-2)-5$, $q(x)$ は多項式とする。$f(0)=1$ ならば、$0<c<2$ で $f(c)=0$ となるものがあることを説明せよ。Let $f(x)=q(x)(x-2)-5$, where $q(x)$ is a polynomial. Suppose $f(0)=1$. Explain that there is c $(0<c<2)$ such that $f(c)=0$.

Message 欄（裏にもどうぞ）：ICU は「信頼される地球市民を育む」ことを目指していますが、鍵は何だと思いますか。ICU aims to nurture trustworthy global citizen. What do you think is the key?（「ホームページ掲載不可」の場合は明記のこと。If you don't want your message to be posted, write “ Do Not Post. ”）

Solutions to Quiz 5

1. 次の極限を求めよ。極限がない場合はその理由も書いて下さい。途中の式も略さずに。Find the limits of the following. If there is no limit, or diverge, briefly explain why. Show work!

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{99}{100}\right)^n = 0.$ $\qquad \left|-\frac{99}{100}\right| < 1.$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+3n^3}{1-5n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3}+3}{\frac{1}{n^3}-5} = -\frac{3}{5}.$ $\qquad \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3} = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^3 = 0.$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n}{1-5n+2n^2-3n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+3\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^3}-5\frac{1}{n^2}+2\frac{1}{n}-3} = 0.$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-2}{x+2} = \frac{\lim_{x\to 2}(x^2+x-2)}{\lim_{x\to 2}(x+2)} = \frac{4}{4} = 1.$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x+1} = \frac{4}{3}.$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-3}{x^2-x-2}$ 発散 (divergent)

分子は 3 に近づくが、分母は 0 に近づくから極限は存在しない。No Limit.

2. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^4-3x^3-2x^2+12x-8}{x^3-2x^2-4x+8}$ を求めよ。途中の式も略さずに。Find the limit. Show work.

2	1	−3	−2	12	−8
		2	−2	−8	8
2	1	−1	−4	4	$\boxed{0}$
		2	2	−4	
2	1	1	−2	$\boxed{0}$	
		2	6		
	1	3	$\boxed{4}$		

2	1	−2	−4	8
		2	0	−8
2	1	0	−4	$\boxed{0}$
		2	4	
2	1	2	$\boxed{0}$	
		2		
	1	$\boxed{4}$		

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-3x^3-2x^2+12x-8}{x^3-2x^2-4x+8} = \lim_{x\to 2}\frac{((x+3)(x-2)+4)(x-2)^2}{((x-2)+4)(x-2)^2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+3)(x-2)+4}{(x-2)+4} = \frac{4}{4} = 1.$$

別解: 上の計算を二段階 5 行目までですると、分子 (numerator) は、$(x^2-x-2)(x-2)^2$. 分母 (denominator) は $(x+2)(x-2)^2$ であることが分かる。$(x-2)^2$ を約分 (cancel) すると、1 (d) と同じ問題になる。従って、極限値 (limit) は 4.

3. $f(x) = q(x)(x-2)-5$, $q(x)$ は多項式とする。$f(0)=1$ ならば、$0<c<2$ で $f(c)=0$ となるものがあることを説明せよ。Let $f(x) = q(x)(x-2)-5$, where $q(x)$ is a polynomial. Suppose $f(0)=1$. Explain that there is c $(0<c<2)$ such that $f(c)=0$.

解：$f(x)$ は多項式だから連続。また、$f(x) = q(x)(x-2)-5$ だから $f(2)=-5$, $f(0)=1$ より、$f(0)=1>0>-5=f(2)$ であるので、Proposition 5.3 （中間値の定理）で $\alpha = 0$ とすると、$0<c<2$ で $f(c)=0$ となる、c が存在することが分かる。

Since $f(x)$ is a polynomial, it is continuous. Since $f(x) = q(x)(x-2)-5$, $f(2)=-5$. By assumption, $f(0)=1$. Since 0 is in between 1 and -5, by Proposition 5.3 (Intermediate Value Theorem) there is a number c in the interval $[0,2]$ such that $f(c)=0$.

Quiz 6

ID#: **Name:**

1. 次の関数 $y = f(x)$ の導関数を求めよ。Find the derivative of $y = f(x)$.

   (a) $y = \dfrac{e^x}{x^2+1}$

   (b) $y = x^3 + \dfrac{1}{x^3} + 3\sqrt[3]{x} + \log x$, $(x > 0)$.

   (c) $y = (x^2 + x + 2)^{99}$

   (d) $y = (x^2+1)e^{x^2+1}$

   (e) $y = g(\log x)$, where $g'(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$, $(x > 0)$.

2. $f(x)$ の導関数は $g(x) = f'(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$、また $f(1) = 2$ とする。

   (a) $f(x)$ の $x = 1$ における接線の方程式を書け。Find the equation of the tangent line of $f(x)$ at $x = 1$.

   (b) $g(x) = f'(x)$ の導関数 $g'(x) = f''(x)$ を求めよ。Find $g'(x) = f''(x)$.

   (c) $x = 2$ において $f(x)$ は増加か、減少か、極大か、極小かを決定し簡単に理由も記せ。Determine whether $f(x)$ is increasing, decreasing, a local maximum or a local minimum at $x = 2$. State your reason.

   (d) $x = -1$ において $f(x)$ は増加か、減少か、極大か、極小かを決定し簡単に理由も記せ。Determine whether $f(x)$ is increasing, decreasing, a local maximum or a local minimum at $x = -1$. State your reason.

Message 欄（裏にもどうぞ）：自由に思考すること・信じること・愛することについて。To liberalize your thinking, to believe and to love.（「ホームページ掲載不可」の場合は明記のこと。If you don't want your message to be posted, write "Do Not Post."）

Solutions to Quiz 6

1. 次の関数 $y = f(x)$ の導関数を求めよ。Find the derivative of $y = f(x)$.

   (a) $y = \dfrac{e^x}{x^2+1}$ $\quad y' = \dfrac{e^x(x^2+1-2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$.

   (b) $y = x^3 + \dfrac{1}{x^3} + 3\sqrt[3]{x} + \log x$, $(x > 0)$.
   $y' = (x^3 + x^{-3} + 3x^{\frac{1}{3}} + \log x)' = 3x^2 - 3x^{-4} + x^{-\frac{2}{3}} + \dfrac{1}{x}$

   (c) $y = (x^2+x+2)^{99}$, $y' = 99(x^2+x+2)^{98}(2x+1)$

   (d) $y = (x^2+1)e^{x^2+1}$, $y' = 2xe^{x^2+1} + (x^2+1)e^{x^2+1}(2x) = 2x(x^2+2)e^{x^2+1}$.

   (e) $y = g(\log x)$, where $g'(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$, $(x > 0)$.
   $y' = \dfrac{e^{\log x}}{(\log x)^2+1}\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{(\log x)^2+1}$.

2. $f(x)$ の導関数は $g(x) = f'(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$、また $f(1) = 2$ とする。

   (a) $f(x)$ の $x = 1$ における接線の方程式を書け。Find the equation of the tangent line of $f(x)$ at $x = 1$.
   解：$f'(1) = 1 + 1 - 3 - 5 - 2 = -8$.
   $$y = f'(1)(x-1) + f(1) = -8(x-1) + 2 = -8x + 10.$$

   (b) $g(x) = f'(x)$ の導関数 $g'(x) = f''(x)$ を求めよ。Find $g'(x) = f''(x)$.
   解：
   $$g'(x) = f''(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 5.$$

   (c) $x = 2$ において $f(x)$ は増加か、減少か、極大か、極小かを決定し簡単に理由も記せ。Determine whether $f(x)$ is increasing, decreasing, a local maximum or a local minimum at $x = 2$. State your reason.
   解：$f'(2) = 2^4 + 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 10 - 2 = 0$, $f''(2) = 32 + 12 - 12 - 5 = 27 > 0$. 従って、Second Derivative Test により、$f(x)$ は $x = 2$ で極小となる。

   (d) $x = -1$ において $f(x)$ は増加か、減少か、極大か、極小かを決定し簡単に理由も記せ。Determine whether $f(x)$ is increasing, decreasing, a local maximum or a local minimum at $x = -1$. State your reason.
   解：$f'(-1) = 1-1-3+5-2 = 0$, $f''(-1) = -4+3+6-5 = 0$, $f'''(x) = 12x^2+6x-6$ and $f'''(-1) = 12-6-6 = 0$. Now $f''''(x) = 24x+6$, $f''''(-1) = -24+6 = -8 < 0$。従って、$x = -1$ で $f'''(x)$ は減少、$f'''(-1) = 0$ だから、$f'''(x)$ は -1 で正から負になる。したがって $f''(x)$ は、増加から減少、$f''(-1) = 0$ だから、$f''(x) < 0$ よって、$f'(x)$ は減少。よって、$f'(x)$ は -1 で正から負になる。これより、$f(x)$ は -1 で増加から減少に転じる。したがって、極大。
   別解：$f'(-1) = f''(-1) = f'''(-1) = 0 > f''''(-1)$ までは同じ。$h(x) = f''(x)$ とすると、$h'(-1) = 0$, $h''(-1) = f''''(-1) < 0$ より、$f''(x) = h(x)$ は、$x = -1$ で極大値 0 を取るので、c の付近で、$f''(x) < 0$ よって $f''(-1) = 0$ であるが、Second Derivative Test の原理から、$f(x)$ は $x = -1$ で極大。
   補注:$g(x) = f'(x) = (x+1)^3(x-2) = -3(x+1)^3 + (x+1)^4$ だから $g(x)$ は $x < -1$ で正、$-1 < x < 2$ で負、$2 < x$ で正である。これを使うことも可能だが、因数分解をする必要が生じる。最後の形からも考えることができる。また $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2x + \frac{141}{20}$ であることも、少し議論するとわかる。これは積分を学んでから。ここでは、$f(x)$ がわからなくても、部分的な情報からいろいろなことがわかることが重要。

Quiz 7

ID#: **Name:**

1. $f(x) = (x^2+1)e^{-x}$ の導関数を求めよ。Find the derivative of $f(x) = (x^2+1)e^{-x}$.

2. $F(x) = \int_0^x (t-1)^2 e^{-t} dt$ とするとき、$F'(x)$ を求めよ。Find $F'(x)$.

3. $\int_0^1 (x-1)^2 e^{-x} dx$ を求めよ。Evaluate the definite integral.

4. 次の計算をせよ。Compute the following.
   (a) $\int (12x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 1)dx$

   (b) $\int (\frac{12}{x^5} + \frac{1}{2\sqrt{x}})dx$

   (c) $\int (\frac{1}{x} + e^x)dx$

   (d) $\int (2x+3)^9 dx$

   (e) $\int_{-2}^2 (t+2)^3 dt$

5. $y = f(x)$ とするとき、次の微分方程式を解け。Let $y = f(x)$. Solve the following differential equations.
   (a) $y' = 3x^5 + 2x^3$, $y(0) = 2$.

   (b) $y' = -2y$, $y(0) = 2$.

Message 欄（裏にもどうぞ）：学びたいこと・受け継ぎたいこと・伝えたいこと What you want to learn, pass on to others, a tradition to follow（「ホームページ掲載不可」の場合は明記のこと。If you don't want your message to be posted, write "Do Not Post."）

Solutions to Quiz 7

1. $f(x)=(x^2+1)e^{-x}$ の導関数を求めよ。Find the derivative of $f(x)=(x^2+1)e^{-x}$.
   解：$f'(x)=2xe^{-x}+(x^2+1)e^{-x}(-1)=-(x^2-2x+1)e^{-x}=-(x-1)^2e^{-x}$.

2. $F(x)=\int_0^x (t-1)^2e^{-t}dt$ とするとき、$F'(x)$ を求めよ。Find $F'(x)$.
   解：By Fundamental Theorem of Calculus, $F(x)=\int_0^x (t-1)^2e^{-t}dt$ is an antiderivative of $(x-1)^2e^{-x}$. Hence $F'(x)=(x-1)^2e^{-x}$.

3. $\int_0^1 (x-1)^2e^{-x}dx$ を求めよ。Evaluate the definite integral.
   解：
   $$\int_0^1 (x-1)^2e^{-x}dx=-\int_0^1 -(x-1)^2e^{-x}dx=-\left[(x^2+1)e^{-x}\right]_0^1=-2e^{-1}+1=1-\frac{2}{e}.$$

4. 次の計算をせよ。Compute the following.
   (a) $\int(12x^5-4x^3+6x^2-1)dx=2x^6-x^4+2x^3-x+C.$
   (b) $\int(\frac{12}{x^5}+\frac{1}{2\sqrt{x}})dx$
   $$=\frac{12}{-5+1}x^{-5+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-1/2+1}+C=-3x^{-4}+x^{1/2}+C=-\frac{3}{x^4}+\sqrt{x}+C.$$
   (c) $\int(\frac{1}{x}+e^x)dx=\log|x|+e^x+C.$
   (d) $\int(2x+3)^9dx=\frac{1}{20}\int 20(2x+3)^9dx=\frac{1}{20}(2x+3)^{10}+C.$
   (e) $\int_{-2}^2(t+2)^3dt=\left[\frac{1}{4}(t+2)^4\right]_{-2}^2=\frac{4^4}{4}=4^3=64.$

5. $y=f(x)$ とするとき、次の微分方程式を解け。Let $y=f(x)$. Solve the following differential equations.
   (a) $y'=3x^5+2x^3$, $y(0)=2$.
   解：
   $$y=\frac{1}{2}x^6+\frac{1}{2}x^4+C,\ 2=y(0)=C. \text{ Hence } y=\frac{1}{2}x^6+\frac{1}{2}x^4+2.$$
   (b) $y'=-2y$, $y(0)=2$.
   解：
   $$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{-2}{1/y},\ \log|y|=-2x+C,\ y=e^{-2x}e^C,\ 2=y(0)=e^C. \text{ Hence } y=2e^{-2x}.$$