1 Sets and Logic

集合 (Set)： 「もの」の集まり

どんなものをもってきてもよいが、それがその集まりの中にあるかないかがはっきりと定まっているようなものでなければならない。

元、要素 (Element)： 集合 A のなかに入っている個々の「もの」を A の元、要素といい、a が集合 A の元であることを、記号で次のように書く。

$$a \in A \text{ または } A \ni a$$

a は A の属する、a は A に含まれるなどと言う。その否定 (a は A の元ではない) を次のように書く。

$$a \notin A \text{ または } A \not\ni a.$$

$A = \{2, 3, 5, 7\}$ のように、A を表すのに A の元をすべて列挙する仕方と、$A = \{x \mid x \text{ は } 10 \text{ 以下の素数}\}$ の様に、その元の満たすべき条件を記述する仕方とがある。

部分集合 (Subset)： 集合 A、B において A のすべての元が、B の元であるとき、A は B の部分集合であると言い次のように書く。

$$A \subset B \text{ または } B \supset A.$$

集合の相等 (Equality of Sets)： 二つの集合 A, B において、$A \subset B$ かつ $B \subset A$ が成り立つ時 A と B は相等であると言い $A = B$ と書く。

共通部分 (Intersection)： 二つの集合 A, B において、A と B の両方に共通な元全体の集合を A と B との共通部分といい $A \cap B$ と書く。すなわち、

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\} = \{x \mid x \in A, x \in B\}.$$

和集合 (Union)： 二つの集合 A, B において、A の元と B の元とを全部寄せ集めて得られる集合を A と B との和集合といい $A \cup B$ と書く。すなわち、

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$

空集合 (Empty Set)： 元を全く含まない集合を空集合といい $\emptyset$ で表す。

差集合 (Difference)： 二つの集合 A, B において、A の元で B の元ではない元全体の集合を A と B との差集合といい、$A \setminus B$ または $A - B$ と書く。すなわち、

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$$

補集合 (Complement)： 全体集合 (U または Ω が良く使われる：(Universal Set)) を一つ定めた時その部分集合 A に対し、A に含まれない要素全体を A^c または $\overline{A}$ で表し、A の補集合と言う。

命題 (Proposition)： 正しい (真 True) か正しくない (偽 False) が明確に区別できる文を命題という。「正しい」を「成り立つ」、「正しくない」を「成り立たない」と考えても良い。

真理値 (Truth Value)： 命題が真であることを「T」、偽であることを「F」で表す。これを命題の真理値という。

否定・論理和・論理積・含意： $\neg p$、$p \vee q$、$p \wedge q$、$p \Rightarrow q$

p	$\neg p$
T	F
F	T

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	T	F	T
F	F	F	F	T

全称命題 (Universal Proposition)： 「任意の（すべての）x について命題 $p(x)$ が成り立つ」を全称命題といい $\forall x\, p(x)$ と書く。

存在命題 (Existential Proposition)： 「ある x について命題 $p(x)$ が成り立つ」を存在命題といい $\exists x\, p(x)$ と書く。

2 System of Linear Equations

n 変数連立一次方程式 ⇔ **拡大係数行列**

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

連立一次方程式の基本変形 ⇔ **行の基本変形**

連立一次方程式の基本変形		行の基本変形
1. ある方程式を何倍かする。(0 倍はのぞく。)		1. ある行に 0 でない定数をかける。
2. 2 つの方程式を交換する。	⇔	2. 2 つの行を交換する。
3. ある方程式に別の方程式を何倍かして加える。		3. ある行に、別の行を何倍かして加える。

また、拡大係数行列の $b_1, b_2, \ldots, b_m$ の列を除いたものを係数行列という。

Definition 2.1 次のような行列を**既約ガウス行列**という。
1. ある行が 0 以外の数を含めば、最初の 0 でない数は 1 である。(これを先頭の 1 という。)
2. すべての数が 0 であるような行があれば、その下の行はすべて 0 のみである。
3. 上の行の先頭の 1 は、下の行の先頭の 1 よりも前(左)にある。
4. 先頭の 1 を含む列の他の数は、すべて 0 である。

Theorem 2.1 任意 (arbitrary) の行列は、行の基本変形を何回か施して、既約ガウス行列にすることができる。

Definition 2.2 行の基本変形で得た既約ガウス行列の 0 でない行の数をその行列の**階数 (rank)** と言い、行列 A に対して、rank A と書く。

Remarks:

1. Theorem 2.1 によって、どんな行列も基本変形を何回も用いれば既約ガウス行列にすることができるから、どんな行列でも rank A を決めることができる。
2. rank A はどのように基本変形を施していったかによらず決まる。
3. A が最初から既約ガウス行列であれば、rank A は A の 0 でない行の数と等しい。またこの数は「先頭の 1」の数とも等しい。

Theorem 2.2 n 変数の連立一次方程式の解について以下が成立する。

(1) 拡大係数行列と係数行列の階数が異なれば、その連立一次方程式は解を持たない。

(2) 拡大係数行列と係数行列の階数が等しく、その階数が n ならば、その連立一次方程式はただ一組の解を持つ。

(3) 拡大係数行列と係数行列の階数が等しく、階数が $r < n$ ならば、その連立一次方程式の解(の組)は無限個あり、$n - r$ 個の媒介変数を用いて表すことができる。

Remarks: 連立一次方程式の解(の組)の数は 0 個か、1 個か、無限個かのいずれかである。無限個の場合、解の組がどのくらい多くあるかをはかる目安が媒介変数の個数である。(3) の意図するところは、すべての解(の組)をあらわすには、媒介変数を $n - r$ こ必要とすることも表している。

Example 2.1 次の行列を拡大係数行列とする方程式の解は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-5t-5u \\ t \\ 1-3u \\ 2-4u \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ -3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3 Matrices

Definition 3.1 下の A の様に $m \times n$ 個の数を長方形（矩形）に並べたを $m \times n$ **行列**、又は、(m,n) 行列と言う。略して、$A = [a_{ij}]$ などと書くこともある。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}'_i = [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}]$$

$1 \times n$ 行列 を n **次行ベクトル**、$m \times 1$ 行列、を m **次列ベクトル**ということもある。上の行列 A において、左から、j 番目の縦に並んだ、$\boldsymbol{a}_j$ を A の **第 j 列**と言い、上から、i 番目の横に並んだ、$\boldsymbol{a}'_i$ を A の**第 i 行**と言う。第 i 行 第 j 列を (i,j) **成分**と呼ぶ。上の行列 A は、(i,j) 成分が a_{ij} であるような行列である。

Definition 3.2 (1) A、B を共に同じ型（$m \times n$）の行列、c を数（スカラー）とする、**和** $A+B$、**スカラー倍** cA を各対応する成分の和と、各成分の c 倍とで定義する。すなわち、

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix},\ cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

(2) $A = (a_{i,j})$ を $m \times r$ 行列、$B = (b_{k,l})$ を $r \times n$ 行列とする。このとき、$m \times n$ 行列 $C = (c_{s,t})$ の各成分は次のようにして定義されたものとする。

$$c_{s,t} = \sum_{u=1}^{r} a_{s,u} b_{u,t} = a_{s,1}b_{1,t} + a_{s,2}b_{2,t} + \cdots + a_{s,r}b_{r,t}.$$

このとき、$C = AB$ と書き、**行列 A と B の積**という。

Remarks.

1. $m \times r$ 行列 A と $s \times n$ 行列 B が与えられた時、積がいつも定義できるわけではない。$r = s$ すなわち最初の行列 A の列の数と、後の行列 B の行の数が一致したときに限る。A, B を共に、$n \times n$ 行列とすると、AB も BA も共に定義することができ、どちらも $n \times n$ 行列になる。$n \times n$ 行列を (n 次) 正方行列と言う。
2. すべて成分が零の $m \times n$ 行列を 零行列と言い、$\mathbf{0} = \mathbf{0}_{m,n}$ と書く。
3. i 行 i 列の成分（(i,i) 成分）を対角成分と言う。n 次正方行列で、対角成分がすべて 1 他は、すべて 0 であるような行列を、単位行列と言い、$I = I_n$ と書く。(教科書によっては、$E = E_n$ を使っているものも多い。簡単に確かめられるように、A を $m \times n$ 行列、B を $n \times m$ 行列とすると、$AI = A$、$IB = B$。

Proposition 3.1 行列の演算に関して次の諸性質が成り立つ。

(1) $A + B = B + A$ （加法に関する交換法則）

(2) $A + (B + C) = (A + B) + C$ （加法に関する結合法則）

(3) $A(BC) = (AB)C$ （乗法に関する結合法則）

(4) $A(B + C) = AB + AC$、$(A + B)C = AC + BC$ （分配法則）

(5) $cA = (cI)A$

Definition 3.3 正方行列 A について、$BA = I$ を満たす正方行列 B が存在するとき、A は、**可逆**である（又は、可逆行列 (invertible matrix) [**正則行列** (nonsingular matrix)] である）と言う。あとで示すように $BA = I$ ならば $AB = I$ も満たす。B を A の逆行列と言い $B = A^{-1}$ と書く。

Theorem 3.2 A を n 次正方行列、$I = I_n$ を n 次単位行列とし、$C = [A, I]$ なる、$n \times 2n$ の行列を考える。この行列 C に、行に関する基本変形を施し、既約ガウス行列に変形する。その結果を D とする。もし、$D = [I, B]$ の形になれば、$B = A^{-1}$ である。もし、D の左半分が、I で無ければ、A は、逆行列を持たない。とくに、A が逆行列を持つことと、rank $A = n$ であることとは、同値である。

Example 3.1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ に対して、} C = C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とおき、行の基本変形を施す。

$$\begin{aligned}
T_1C_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C_2 \\
T_2C_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} = C_3 \\
T_3C_3 &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} = C_4 \\
T_4C_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} = C_5 \\
T_5C_5 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & -1 \end{bmatrix} = C_6 \\
T_6C_6 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & -1 \end{bmatrix} = [I\ B] = D
\end{aligned}$$

すなわち、$I = T_6T_5T_4T_3T_2T_1A$ かつ $B = T_6T_5T_4T_3T_2T_1$ したがって、$I = BA$ を得る。これより、A は、可逆行列で、その逆行列は、

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \\ -4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

となる。

この例における、$T_1, T_2, \ldots, T_6$ のように行の基本変形に対応した行列を基本行列という。基本行列 $S_1, S_2, \ldots, S_6$ で $S_1T_1 = S_2T_2 = \cdots = S_6T_6 = I$ となるものがあるから、$A = S_1S_2 \cdots S_6$ で基本行列の積として書くことができる。また、$AB = I = BA$ もわかる。

Proposition 3.3 A を n 次正方行列とする。次は同値である。

1. $BA = AB = I$ を満たす n 次正方行列 B が存在する。
2. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は、$\boldsymbol{b}$ を一つ決めるといつもただ一つの解を持つ。
3. $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ はただ一つの解を持つ。
4. A に行の基本変形を施し得られる既約ガウス行列はいつでも単位行列 I である。
5. A に行の基本変形を施すと単位行列 I が得られる。
6. A は、基本行列のいくつかの積で書くことが出来る。
7. $(\det A \neq 0$。)

4 連立一次方程式まとめ

以下に連立一次方程式についてまとめる。

1. 連立一次方程式は行列方程式で表すことができる。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

   に対しては、

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

   とすると、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と書ける。

2. $\boldsymbol{x}_0$ は、$A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}$ を満たす n 次列ベクトルとする。$\boldsymbol{x}$ が、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たすとすると、

$$A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = A\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

   だから、$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ とおくと、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{y}$ で、$\boldsymbol{y}$ は、$A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ を満たす n 次列ベクトル、すなわち、A を係数行列とする連立一次同次方程式の解である。逆に、$A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{y}$ を取ると、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{y}$ は、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす。

$$A\boldsymbol{x} = A(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x}_0 + A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{b}.$$

   この様に、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす解一つと、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を満たす解すべてが分かれば $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解はすべて分かる。$\boldsymbol{x}_0$ を**特殊解** と言い、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{y}$ の形のすべての解を表すものを**一般解**と言う。

   例えば、連立一次方程式、

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 11 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 17 \end{bmatrix}$$

   の場合、一般解は、

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

   と書くことができるが、特殊解は、いろいろとあり、例えば、$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$ である。一方、$t \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ は、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を満たす解の一般形であった。

3. 一般解を求めたり、解の存在非存在を決定するのには、拡大係数行列を考えて、これに行に関する基本変形を施し、ガウス行列、又は、既約ガウス行列にすることによって求めることができる。

   (a) 行に関する基本変形は 3 種類の基本行列という可逆な行列を左からかけることによって実現した。これより、基本変形によって、解は変わらないことが示せた。すなわち、基本変形前の拡大係数行列に対応する解と、基本変形後の拡大係数行列に対応する解は、同じものである。

   (b) 係数行列の階数と、拡大係数行列の階数が等しいときは、解が存在し、それらが等しくないときは解は存在しない。

   (c) 解が存在する場合は、変数の数と、拡大係数行列の階数の差が、解を表すときの自由変数（パラメター）の数である。

5　多項式・多項式関数

5.1　公式

(5–1) $$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + a^i b^{n-i-1} + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

5.2　多項式

Definition 5.1 $c_0, c_1, \ldots, c_n$ を数とする時、文字 x を含む式、

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

を（x に関する）多項式といい、$c_n \neq 0$ のとき、$f(x)$ を 次数 n の多項式といい、$\deg f(x) = n$ と書く。x に数を代入して、$f(x)$ の値を考える場合は、$f(x)$ を多項式関数という。$\deg 0 = -\infty$ と約束する。

Theorem 5.1 $f(x)$, $g(x)$ を多項式とする。このとき、以下が成立する。

(1) $\deg f(x)g(x) = \deg f(x) + \deg g(x)$。

(2) $g(x) \neq 0$ ならば、多項式 $q(x)$, $r(x)$ で

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x),\ \deg r(x) < \deg g(x)$$

となるものが存在する。

(3) $a_1, a_2, \cdots, a_m$ を相異なる数とする。$f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_m) = 0$ ならば多項式 $g(x)$ で

$$f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m)g(x),\ \deg g(x) = \deg f(x) - m$$

をみたすものが存在する。

$a_1, a_2, \cdots, a_m$ を相異なる数とする。$P(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m)$、$P_i(x) = P(x)/(x-a_i)$ とすると、$j \neq i$ のときは、$P_i(x)$ は $(x-a_j)$ の項を含むから $P_i(a_j) = 0$ となる。また、$P_i(a_i) \neq 0$ である。そこで $Q_i(x) = P_i(x)/P_i(a_i)$ とすると、$Q_i(a_j) = 0$、$Q_i(a_i) = 1$ となる。

Proposition 5.2 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ を相異なる数とする。このとき、

$$f(a_1) = b_1,\ f(a_2) = b_2, \cdots, f(a_m) = b_m$$

を満たす多項式 $f(x)$ が存在する。ある多項式 $h(x)$ を用いて、$f(x)$ は次のように書くことができる。

$$f(x) = b_1Q_1(x) + b_2Q_2(x) + \cdots + b_mQ_m(x) + h(x)P(x)$$

特に次数 $\deg f(x) \leq m$ を満たすものはただひとつだけである。

Example 5.1

$$\begin{aligned} f(x) &= b_1 \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + b_2 \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + b_3 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} \\ &= \frac{b_1}{2}(x-2)(x-3) - b_2(x-1)(x-3) + \frac{b_3}{2}(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

は、$f(1) = b_1, f(2) = b_2, f(3) = b_3$ を満たす多項式であり、逆に $f(x)$ をこの条件を満たす多項式とすると、ある多項式 $h(x)$ で

$$\frac{b_1}{2}(x-2)(x-3) - b_2(x-1)(x-3) + \frac{b_3}{2}(x-1)(x-2) + h(x)(x-1)(x-2)(x-3)$$

と書くことができる。

6 極限と関数の連続性

6.1 数列の極限

数列: 数列 $\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ が一定の値 α に近づく時、$\{a_n\}$ は α に収束 (converge) する、または $\{a_n\}$ の極限値は α であるといい、記号で $a_n \to \alpha\,(n \to \infty)$, または $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と書く。収束しない数列は発散する (diverge) という。(さらに細かく ∞ に発散、$-\infty$ に発散、振動などと区別する場合もあるが、ここでは、収束または発散の二つの区別のみ考えることとする。)

Proposition 6.1 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$、$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$ のとき、以下が成り立つ。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c\alpha$, $\quad$ (c は定数)

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha + \beta$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right) = \alpha\beta$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$, $\quad (b_n \neq 0, \beta \neq 0)$

Example 6.1 1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$: 0 に収束.

2. 以下の場合はすべて発散。

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} n & = & \infty & : \text{正の無限大に発散} \\ \lim_{n\to\infty} -n & = & -\infty & : \text{負の無限大に発散} \\ \lim_{n\to\infty}(-1)^n n & & & : \text{発散:振動} \end{cases}$$

3. $a_n = r^n$ のときは次が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty: \text{(正の無限大に) 発散} & \text{if } r > 1 \\ 1:\ 1 \text{ に収束} & \text{if } r = 1 \\ 0:\ 0 \text{ に収束} & \text{if } |r| < 1 \\ \text{発散 (振動)} & \text{if } r \leq -1 \end{cases}.$$

Example 6.2 1. $\lim\limits_{n\to\infty} 2 - \dfrac{5}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} 2 - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5}{n} = 2 - 0 = 0.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(3 - \dfrac{1}{n}\right)\left(4 + \dfrac{1}{n}\right) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} 3 - \dfrac{1}{n}\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty} 4 + \dfrac{1}{n}\right) = 3 \cdot 4 = 12.$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2-n}{3n-5} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{2}{n} - 1}{3 - \frac{5}{n}} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} - 1}{\lim_{n\to\infty} 3 - \frac{5}{n}} = \dfrac{-1}{3} = -\dfrac{1}{3}.$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \dfrac{0}{1} = 0.$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2n+3}{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2+\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n}} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} n+2+\frac{3}{n}}{\lim_{n\to\infty} 1+\frac{2}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} n+2 = \infty.$ 発散

6.2 指数関数

$a > 0$ とするとき、$y = a^x$ となるとき $x = \log_a y$ と書く。$a^0 = 1$。

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y,\ (a^x)^y = a^{xy},\ \log_a xy = \log_a x + \log_a y,\ \log_a x^y = y\log_a x$$

(6–2)
$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.7182818284590\cdots$$

(6–3)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

6.3 関数の極限・連続性

Definition 6.1 関数 $f(x)$ において 変数 x が a と異なる値をとりながら a に近づくとき、$f(x)$ が一つの値 α に近づくならば x が a に近づくときの $f(x)$ の極限値は α であるといい、

$$f(x) \to \alpha \ (x \to a) \text{ または } \lim_{x\to a} f(x) = \alpha \text{ で表す。}$$

Proposition 6.2 $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$、$\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ のとき、以下が成り立つ。

(1) $\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x) = c\alpha \quad (c$ は定数)

(2) $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = \alpha + \beta$

(3) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = \alpha\beta$

(4) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta} \quad (g(x) \neq 0,\ \beta \neq 0)$

Definition 6.2 一般に関数 $f(x)$ において、$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ が成り立つ時、関数 $f(x)$ は $x=a$ で連続 (continuous) であるという。また、関数が定義されている各点で $f(x)$ が連続であるとき、$f(x)$ は連続である、または連続関数であるという。

Example 6.3 定数関数 c、多項式、e^x などは、各点で連続、また、連続関数の和、差、定数倍、積も、連続関数。商も、分母が零にならない範囲で連続関数である。

Example 6.4

1. $f(x) = (x^2+7x)/(x+1)$ の -2 での極限値と考える。x^2+7x も $x+1$ も多項式だから $x=-2$ で連続でかつ、分母の $x+1$ は $x=-2$ の近くで 0 にならないから、
$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+7x}{x+1} = \frac{\lim_{x\to -2} x^2+7x}{\lim_{x\to -2} x+1} = \frac{(-2)^2+7(-2)}{(-2)+1} = \frac{-10}{-1} = 10.$$
この場合は $f(-2) = 10$ だから $f(x)$ は $x=-2$ で連続である。

2. $g(x) = (x^2-5x+4)/(x-4)$ の 4 での極限値を考える。$x=4$ では分母が 0 になるので、$g(x)$ は $x=4$ で定義されていない。しかし、$x \neq 4$ では定義されている。分子は $x^2-5x+4 = (x-4)(x-1)$ だから $x \neq 4$ では $g(x) = x-1$ になる。従って、
$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-5x+4}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x-1)}{x-4} = \lim_{x\to 4} x-1 = 4-1 = 3.$$

3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2-x}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x(x-1)}{x} = \lim_{x\to 0} x-1 = -1.$

4. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x+2 = 2+2 = 4.$

5. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+2 = 1+2 = 3.$

6. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+2x+4}{x+1} = \dfrac{2^2+2\cdot 2+4}{2+1} = 4.$

Proposition 6.3 閉区間 $[a,b]$ 上で連続な関数 $f(x)$ において、C を、$f(a)$ と、$f(b)$ の間の値とすると、$f(c) = C$ となる点 c が、区間 $[a,b]$ 内にある。

Example 6.5 $f(x) = 4x^5 - 10x^4 - 20x^3 + 40x^2 + 16x - 15$ とする。$f(-2) = -15$、$f(-1) = 15$、$f(0) = -15$、$f(1) = 15$、$f(2) = -15$、$f(3) = 15$。従って、5 つの区間 $[-2,-1]$、$[-1,0]$、$[0,1]$、$[1,2]$、$[2,3]$ の内部で、$f(x) = 0$ となる点、すなわち根を少なくとも一つずつ持つ。$f(x)$ は、5 次多項式だから、高々 5 個の実根を持つ。すなわち、この 5 個以外には、根を持たず、これらの区間に丁度一つずつあることも解ります。(なぜでしょう。)

Proposition 6.4 閉区間 $[a,b]$ 上で連続な関数 $f(x)$ は、$[a,b]$ 上の最大・最小をとる。

7　微分係数と導関数

微分は関数の変化率（それぞれの点でどのくらいの率で増えているか減っているか）を調べる時に用いられる。それによって、ある点で関数が増えているか、減っているかだけでなく、どこで最大や、最小の値をとるか、その関数のグラフの概形、ある値を何回とるかなどについても調べることができる。

Definition 7.1 関数 $f(x)$ が、点 $x=a$ 及びその近くで定義されていて、かつ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

が存在するとき、この値を $f(x)$ の点 a における微分係数と言い、$f'(a)$ と書く。関数 $f(x)$ が、各点 a で微分可能であるとき、a に $f'(a)$ を対応させる関数を $f(x)$ の導関数と言い、$f'(x)$、df/dx、Df で表す。関数 $f(x)$ から、その導関数 $f'(x)$ を求めることを、微分するという。

この定義から導関数 $f'(x)$ は次のように定義される。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \quad (t-x=h \text{ とおくと } t=x+h \text{ だから}) \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad (t\to x \text{ は } h=t-x\to 0 \text{ に注意}) \end{aligned}$$

関数 $f(x)$ が点 a で微分可能ならば、点 a で連続である。すなわち x が a に近づくと $f(x)$ の値は $f(a)$ に近づく。

Proposition 7.1 $f(x)$, $g(x)$ を微分可能な関数、c を定数とすると以下が成り立つ。

1. $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$, $(cf(x))' = cf'(x)$
2. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
3. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

Example 7.1 1. （多項式の微分）$f(x)=x^n$ の、$x=a$ における微分係数と導関数。

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1})}{x-a} \quad (\text{公式 (5-1)}) \\ &= \lim_{x\to a}(x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}) \\ &= na^{n-1} \end{aligned}$$

従って、$f(x)=x^n$ の導関数は $f'(x)=nx^{n-1}$。

2. （指数関数の微分）$(e^x)'=e^x$。次の公式を用いる。

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1 \text{ ただし } e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{a+h}-e^a}{h}=e^a\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^a$$

Proposition 7.2 (合成関数の微分) $g(x)$ は点 a で微分可能、$f(x)$ は点 $g(a)$ で微分可能とする。このとき、$F(x)=f(g(x))$ とすると $F(x)$ の $x=a$ での微分係数は

$$F'(a)=\frac{d}{dx}f(g(a))=f'(g(a))g'(a)$$

Proof. $F(x)=f(g(x))$ とおく。すると、

$$\begin{aligned} F'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)}\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \\ &= f'(g(a))g'(a) \end{aligned}$$

$g(x)$ は、点 $x=a$ で微分可能だから、連続、すなわち、x が、a に近づくとき、$g(x)$ は、$g(a)$ に近づく。■

$y=f(x)=2x-1$ を x について解くと $x=\frac{1}{2}(y+1)$ となる。ここで $g(y)=\frac{1}{2}(y+1)$ とおくと、$y=f(x)\leftrightarrow x=g(y)$ を満たしている。このように関数 $f(s)$, $g(t)$ で $t=f(s)\leftrightarrow s=g(t)$ すなわち $g(f(s))=s$, $f(g(t))=t$ を満たす時 $g(t)$ は $f(s)$ の逆関数であるという。このとき $f(s)$ は $g(t)$ の逆関数になっている。変数に同じ記号を使って $f(x)=2x-1$ の逆関数は $g(x)=\frac{1}{2}(x+1)$ であるともいう。

Proposition 7.3 $f(s)$ および、$g(t)$ が、ある区間で互いに逆関数 $(g(f(s))=s,\ f(g(t))=t)$ ならば、

$$\frac{dg}{dt}=\frac{1}{(\frac{df}{ds})}.$$

Proof. $f(g(t))=t$ を合成関数の微分を用いて、両辺微分すると、$f'(g(t))g'(t)=1$。ただし、$f'(g(t))$ は、s の関数としての微分である。■

Example 7.2 e^x の逆関数 $y=\log x$ の微分。$x=e^x$ だから、

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{x}.$$

Proposition 7.4 次が成り立つ。

(1) $(x^n)'=nx^{n-1}$ （n はどんな実数についても成立する。）

(2) $(e^x)'=e^x$ また $e^y=x$ のとき $y=\log x$ とすると $(\log x)'=\dfrac{1}{x}$

次の右辺の極限があれば、左辺の極限も存在し、等しくなる。

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

特に、$f(a)=g(a)=0$ のときなどに利用でき、

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が得られる。$\lim_{x\to a}f(x)=\pm\infty$、$\lim_{x\to a}g(x)=\pm\infty$ の場合も、同様のことが言える。

Example 7.3 微分（導関数を求めること）。

1. $y=4x^3+5x^2-3x$, $y'=4\cdot(x^3)'+5\cdot(x^2)'-3\cdot(x)'=12x^2+10x-3.$
2. $y=2x^3-5x^2-3$, $y'=6x^2-10x.$
3. $y=(3x+1)(x^2+x+2)$, $y'=3(x^2+x+2)+(3x+1)(2x+1)=9x^2+8x+7.$
4. $y=(x^2+1)(x^3-x^2)$, $y'=2x(x^3-x^2)+(x^2+1)(3x^2-2x)=7x^4-4x^3+3x^2-2x.$
5. $y=\dfrac{1}{x^3}$, $y'=\dfrac{-3}{x^4}.$
6. $y=\dfrac{7x-6}{x^2+1}$, $y'=\dfrac{-7x^2+12x+7}{(x^2+1)^2}.$
7. $y=\dfrac{1}{x+3}, y'=\dfrac{-1}{(x+3)^2}.$
8. $y=x^2e^{-x}=\dfrac{x^2}{e^x}$, $y'=(2x-x^2)e^{-x}$

8　関数とグラフ：Application of Derivatives

Definition 8.1 点 x が、点 a に十分近いときは、常に、$f(a) > f(x)$ が成り立つとき、$f(x)$ は、$x = a$ で、極大になるといい、$f(a)$ をその極大値、点 a を、極大点という。同様にして、点 x が、点 a に十分近いときは、常に、$f(a) < f(x)$ が成り立つとき、$f(x)$ は、$x = a$ で、極小になるといい、$f(a)$ をその極小値、点 a を、極小点という。極大値と極小値を合わせて極値という。

極大・極小は最大・最小とは違います。局地的に見るとその当たりでは一番山のてっぺん、または谷底と言う意味です。

Proposition 8.1 $f(x)$ が連続、かつ微分可能とする。このとき次が成立する。

(1) $x = c$ で極値（極大または極小値）を持てば、$f'(c) = 0$。

(2) $f'(c) > 0$ ならば、$f(x)$ は $x = c$ で増加。

(3) $f'(c) < 0$ ならば、$f(x)$ は $x = c$ 減少。

(4) 常に $f'(x) = 0$ ならば、$f(x)$ は定数関数。

$f'(x)$ の増加、減少は、$f'(x)$ の導関数 $f''(x)$（$f'(x)$ をもう一度微分した、$(f'(x))'$ をこのように書く）によって分かることを考えれば、次のことが分かります。

Proposition 8.2 $f(x)$ は 2 回微分可能な関数とする。このとき次が成立する。

(1) $f'(c) = 0$、$f''(c) < 0$ ならば、関数 $f(x)$ は、c で極大値 $f(c)$ を持つ。

(2) $f'(c) = 0$、$f''(c) > 0$ ならば、関数 $f(x)$ は、c で極小値 $f(c)$ を持つ。

Proof. (1) $f'(c) = 0$ かつ $f''(c) < 0$ とする。$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数ですから、$f''(c) < 0$ ということは、$f'(x)$ は $x = c$ において減少していることがわかります。減少して $f'(c) = 0$ ということは、$x = c$ を境にして、$x < c$ では $f'(x) > 0$、$x > c$ では $f'(x) < 0$ となっています。つまり、$x < c$ で x が c に近づいてくるとき（すなわち c に左から近づいてくるとき）は $f(x)$ は増加しており、$x = c$ をすぎて $x = c$ から遠ざかっていくときは減少していることを意味しています。これは、$x = c$ で $f(x)$ は極大値をとることを意味します。

(2) 同様です。証明を考えてみてください。 ■

Example 8.1 関数 $f(x) = x^4 - 8x^2 + 10$ がどこで極大・極小になるかを考えましょう。命題 8.1 (1) によって、極大または極小になる点では、導関数の値が 0 になるわけですから、まず $f'(x)$ を求めます。さらに、$f'(x) = 0$ となる点で、極大になるのか、極小になるのか、どちらでもないかを判断するため、$f''(x)$ を計算しておきます。

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x+2)(x-2),\ f''(x) = 12x^2 - 16.$$

この計算から $f'(x) = 0$ となるのは $x = -2, 0, 2$ です。それぞれの x での $f''(x)$ の値は、$f''(-2) = 32 > 0$, $f''(0) = -16 < 0$, $f''(2) = 32 > 0$ となりますから、命題 8.2 より $x = -2$ で極小値 $f(-2) = -6$、$x = 0$ で極大値 $f(0) = 10$、$x = 2$ で極小値 $f(2) = -6$ をとることがわかります。表に書くと次のようになります。

x		-2			0			2	
$f(x)$	↘	極小	↗	↗	極大	↘	↘	極小	↗
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
		↗			↘			↗	
$f''(x)$		$+$			$-$			$+$	

$f'(c) = 0$ で $f''(c) = 0$ ならばどうでしょうか。この場合は、この方法では判定できないがさらに、$f'''(c)$ を調べて、これが正の場合には同様の考え方で $f(x)$ は $x = c$ で増加していることがわかります。負の場合には減少しています。したがって、極値をもちません。すなわち、極大にも、極小にもなっていません。$f(x)$ が何回でも微分可能な時は、そこでの値が 0 にならないところまで微分をしそこから出発すると、$x = c$ で増加しているか、減少しているか、極大か、極小か判断することができます。

9　不定積分と定積分

原始関数と不定積分

Definition 9.1 関数 $F(x)$ の導関数が、$f(x)$ に等しいとき、すなわち、$F'(x) = f(x)$ が成り立つとき、$F(x)$ を、$f(x)$ の原始関数と言う。

$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数のひとつであるとき、ほかの原始関数は $F(x)+C$（C は定数）と書くことができる。そこで、この形のものを原始関数の代表という意味で、$f(x)$ の不定積分と呼び、次のように書く。C を積分定数と言う。

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Example 9.1

1. $\displaystyle\int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C,\ (\text{ if } \alpha \neq -1)$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \log|x| + C$
3. $\displaystyle\int e^{x}dx = e^{x} + C$

定積分と、微積分学の基本定理

Definition 9.2 関数 $f(x)$ が、区間 $[a,b]$ で連続であるとする。分割 $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ と実数 $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ の集合 $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ に対して、リーマン和と呼ばれる

$$R_{\Delta,\{t_i\}}(f) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

は、分割 Δ を限りなく細かくしていくとき、一定の値 I に近づく。I を $[a,b]$ 上 $f(x)$ の定積分と言い、次のように書く。

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

Proposition 9.1 関数 $f(x)$ と $g(x)$ は、区間 $[a,b]$ で連続とする。このとき、次が成り立つ。

(1) $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$。

(2) $\displaystyle\int_a^b k\cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$、（$k$ は、定数。）

(3) $a \leq x \leq b$ で、$f(x) \geq g(x)$ ならば、$\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$。

Proposition 9.2 (積分の平均値の定理) 関数 $f(x)$ が、閉区間 $[a,b]$ 上で連続ならば、ある、$c \in (a,b)$ で、

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

を満たすものがある。

Theorem 9.3 (微積分学の基本定理) 関数 $f(x)$ が、閉区間 $[a,b]$ で連続であるとする。

$$G(x) = \int_a^x f(x)dx$$

とすると、$G(x)$ は $f(x)$ の原始関数である。また、$F(x)$ を一つの原始関数とすると、

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$