3　連立一次方程式

3.1　連立一次方程式とその解

ここで学ぶのは線形代数と言われるものです。線形代数の一番の基本は連立一次方程式を考えることです。線形代数は微分積分とともに数学の基礎をなすもので、自然科学でも、社会科学でも使われている理論であり、考え方です。応用という面からも、連立一次方程式の理論は、重要です。このあと連立一次不等式、線形計画法へと進んで行く土台もこの連立一次方程式の理論です。

　連立一次方程式とは次のようなものです。

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\cdots\cdots\cdots & & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
\right.
$$

これは n 変数の 1 次方程式 m 個からなる連立一次方程式です。英語では A system of linear equations と言います。$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ など a に添字のついたものは、数で、係数 (coefficients) と言われます。また、$x_1, x_2, \ldots, x_n$ を変数と呼びます。x_1, x_2 など変数がすべて 1 乗で x_1^2 などが現れないので「一次」といいます。これに対して、$x^2 - x - 2 = 0$ は二次方程式といいます。x^2 が入っており、それよりも高い次数の項 x^3 や、x^{100} などは入っていないからです。次数については、多項式のところでしっかり学びます。n 個の数の組で $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に代入した時、m 個の方程式すべてを満たすものを解 (solution) といいます。 ここで考えたいのは以下の問題です。

1. 解き方、アルゴリズム（算法）[必ず解ける方法]
2. 解はいくつ（何組）あるか。解がいくつあるかはどうやって分かるか。
3. 解はどんな形をしているか。

3.2　行に関する基本変形

まず次の連立方程式を解いてみましょう。これは、二元連立一次方程式です。変数（未知数）が x と y の二つだからです。右の列に書いたものは、方程式の係数だけを取り出して書いたものです。$+$ と $=$ は省いてありますが、-3 のところは、$+(-3)$ と考えて -3 としてあることに注意して下さい。

$$
\left\{
\begin{array}{rcrcr}
x & - & 3y & = & 2 \\
x & + & 2y & = & 12
\end{array}
\right.
\qquad
\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 12 \end{bmatrix}
$$

- 2 式から、1 式を引く。　　　　第 2 行から第 1 行を引く。 ($[2, 1; -1]$)

$$
\left\{
\begin{array}{rcrcr}
x & - & 3y & = & 2 \\
 & & 5y & = & 10
\end{array}
\right.
\qquad
\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 10 \end{bmatrix}
$$

- 2式を $\frac{1}{5}$ 倍する。　　　　第2行に $\frac{1}{5}$ をかける。($[2,\frac{1}{5}]$)

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & - & 3y & = & 2 \\ & & y & = & 2 \end{array}\right. \qquad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- 2式の3倍を1式に足す。　　　　第1行に第2行の3倍を加える。 ($[1,2;3]$)

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & & & = & 8 \\ & & y & = & 2 \end{array}\right. \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

上の変形を追ってみれば分かりますが、x とか y とかいう変数を書かなくても、係数だけに注目すれば、良いことが分かります。
このように数を矩形に並べたものを行列といいます。横に並んだものを行、縦を列と言います。例えば、最後の行列の第一行は $[1\,0\,8]$、第三列の第一行目は8、第二行目は 2 となっています。数を矩形にならべた周りを括弧でくくってありますが、それは、他のものと区別するためで重要ではありません。

この方程式を他の方法で解くこともできますが、いま使った操作は以下のいずれかです。2は用いていませんが。

連立方程式に対する以下の変形を基本変形という。

1. 1次方程式を何倍かする。(0倍はのぞく。)

2. 2つの方程式を交換する。

3. ある方程式に別の方程式を何倍かして加える。

これを行列の変形の言葉に変えると以下のようになります。

以下の変形を行列の 「**行の基本変形**」 という。

1. ある行に0でない定数をかける。

2. 2 つの行を交換する。

3. ある行に、別の行を何倍かして加える。

最初の二つはそう難しくありませんが、3つ目の操作はちょっとなれないと難しいかも知れません。次の様に言い換えてみましょう。
「第 i 行に第 j 行の c 倍を加える。」
この変形で大切なのは、変わるのは第 i 行だけで、第 j 行は変わらないことです。上で行なった変形をこの言葉を使って言い換えてみると、次のようになります。

- 「2式から、1式を引く」→ 「第2行に第1行の -1 倍を加える」

- 「2式の3倍を1式に足す」→ 「第1行に第2行の3倍を加える」

一番右に記号が書いてありますが、上のそれぞれに対応する部分には、$[2,1;-1]$, $[1,2;3]$ とあります。これはこの記号によってどんな操作をしているかをわかるようにしているわけです。他の操作もあわせて書いてみましょう。

$[i;c]$: 第 i 行を c 倍する。$(c \neq 0)$

$[i,j]$: 第 i 行と第 j 行を交換する。

$[i,j;c]$: 第 i 行に第 j 行の c 倍を加える。

例 3.1 次の問題を行列表示を用い、行の基本変形のみを用いて解いてみましょう。

$$\begin{cases} 3x + y &= 17 \\ 2x - 5y &= 3 \end{cases}$$

次の連立方程式を解いてみましょう。

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 4 \\ x + y + z = 1 \\ 11x - y + 5z = 17 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 11 & -1 & 5 & 17 \end{bmatrix}$$

- 1 式と、2 式を交換する。$[1,2]$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 4 \\ 11x - y + 5z = 17 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 11 & -1 & 5 & 17 \end{bmatrix}$$

- 2 式から 1 式の 3 倍を引く（-3 倍を加える）。$[2,1;-3]$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -2y - z = 1 \\ 11x - y + 5z = 17 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 11 & -1 & 5 & 17 \end{bmatrix}$$

- 3 式から 1 式の 11 倍を引く（-11 倍を加える）。$[3,1;-11]$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -2y - z = 1 \\ -12y - 6z = 6 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -12 & -6 & 6 \end{bmatrix}$$

- 3 式から 2 式の 6 倍を引く（-6 倍を加える）。$[3,2;-6]$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -2y - z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

これは、解が一つに決まらない形をしています。例えば、z を決めると、y は決定され、それを用いると、x も決まるが、最初の z は、何でも良いからです。このような場合は、パラメター (媒介変数 (parameter)) を使って解を表示します。そのためもう少し変形してみましょう。

- 2 式を -2 で割る（$-\frac{1}{2}$ をかける）。$[2;-\frac{1}{2}]$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + \frac{1}{2}z = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 1 式から 2 式を引く（-1 倍を加える)。$[1,2;-1]$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & & + & \frac{1}{2}z & = & \frac{3}{2} \\ & y & + & \frac{1}{2}z & = & -\frac{1}{2} \end{array}\right. \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- これは、$z=t$ として、解をパラメターを使って表すと以下のようになります。

$$\left\{\begin{array}{ccl} x & = & -\frac{1}{2}t+\frac{3}{2} \\ y & = & -\frac{1}{2}t-\frac{1}{2} \\ z & = & t \end{array}\right. \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t+\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2}t-\frac{1}{2} \\ t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

一番最後の形をベクトル表示と言います。これについては、行列のところで詳しく説明します。

この例でもわかるように三元連立一次方程式で、方程式が 3 個であっても、解が無限個存在する場合もあることがわかりました。中学校・高等学校では、答が一つに決まる場合が殆んどで、たまにそうでない「変な」問題が混ざっている程度でそれは無視してもどうにかなりましたが、上の例でも実際は単純ではなくいろいろと複雑な問題をはらんでいることを示唆しています。

上の解き方は行列の形に直してあと、変形に制限をつけただけで、いままで勉強してきたものとそうかわっていないと思います。では、最後に x,y,z を求めましたが、それは、本当に最初の連立方程式を満たしているのでしょうか。つまり最初の方程式の解となっているのでしょうか。もちろんそうでなければ一所懸命解いた意味がありません。これは、代入してみれば、確かめることができます。ちょっと確かめて見て下さい。だいたい変な答が出たのですから。解が無限個などという。もう一つ問題があります。それは、最後にもとめたもの以外には、最初の連立方程式の解はないのでしょうか。そういうことも考えていきたいと思います。

3.3 既約ガウス行列と基本定理

n 変数の 1 次方程式 m 個からなる連立一次方程式は、

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

の形に表すことができます。ここで、a_{ij}、b_k は定数。係数を表すのには、a_{ij} のような 2 重添字 (double index) を用います。上のように変形して解を求めるときは、x,y,z や、$x_1,x_2,\ldots,x_n$ などの変数の係数のみが変化するから、他の部分を省略し、長方形 (矩形) に書いたものを考えます。これを、連立一次方程式の「**拡大係数行列 (Augmented Matrix or Extended Coefficient Matrix)**」といいます。実際、この係数の変化のみを拡大係数行列を使って書いたものを上の変形の右に並べて書いてみました。上の一般の連立一次方程式の場合は、以下のようになります。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

また、$b_1, b_2, \cdots, b_m$ の部分をのぞいたものを「**係数行列 (Coefficient Matrix)**」といいます。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

練習問題 3.1 次の二つの連立一次方程式の拡大係数行列を書き、上に行った方法で解いてみてください。よくイメージがわかないときは、方程式の変形をし、それと並べて、行列の変形をしてみましょう。

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 2 \\ x + y + z = 2 \\ 9x - y + 5z = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + y + 2z = 4 \\ x + y + z = 1 \\ 11x - y + 5z = 1 \end{cases}$$

左の解ただ一組で、$x = -4, y = -2, z = 8$、右の方は解は解がありません。

次はどうでしょうか。

$$\begin{cases} -x + 3y + 2z = 1 \\ 3x - 9y - 6z = -3 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

これより、$x = 3t + 2u - 1, y = t, z = u$、となります。この場合には、2 つのパラメターによって解が表示されました。即ち、自由度は 2 個あります（正確な意味は後述）。このように解が無いもの、解がちょうど一個（一組：変数がたくさんあるわけですからこのような言い方の方が正確ですが）のもの、解が無限個（無限組）ありそれらがいくつかの自由変数によって表されるものがあることが分かりました。では、解がちょうど二組あるような連立一次方程式はあるのでしょうか。実は次のことが成り立っています。

「連立一次方程式の解は、ないか（0 個）、1 個か、無限個である。」

さてこれまで見てきたように連立一次方程式解法のアウトラインは、連立一次方程式の「拡大係数行列」に、「行の基本変形」だけを行って、今まで見てきたような「簡単な行列」にし、そこから機械的に解を読みとることである。そこで、「簡単な行列」とは何かを定義します。

定義 3.1 次のような行列を「**既約ガウス行列 (Reduced Echelon Form)**」という。

1. もし、ある行が 0 以外の数を含めば、最初の 0 でない数は 1 である。（これを先頭の 1 (the leading 1) という。）
2. もし、すべての数が 0 であるような行が含まれていれば、それらの行は下の方によせて集められている。
3. すべてが 0 ではない 2 つの行について、上の行の先頭の 1 は、下の行の先頭の 1 よりも前に存在する。
4. 先頭の 1 を含む列の他の数は、すべて 0 である。

定理 3.1 任意 (arbitrary) の行列は、行の基本変形を何回か施して、既約ガウス行列にすることができる。

証明. 行の基本変形を何回か施して、既約ガウス行列にする算法（アルゴリズム）を以下に述べる。

1. すべての成分が 0 ならその行列は既約ガウス行列だから、その場合は良い。すべての成分が 0 ではない最初の列を i_1 とする。行の順序を入れ替え、第 1 行第 i_1 列に零でない成分が来るようにする。それを c_1 とする。

2. 第 1 行を c_1 で割る。すると第 1 行の最初の零でない成分は i_1 列目でそれは、1（先頭の 1) である。他の行の零でない成分は、i_1 列目以降である。第 j 行の i_1 列目に零でない成分 c があれば、第 1 行の $-c$ 倍を、第 j 行に加えると、第 i_1 列で零でないのは、第 1 行目にある先頭の 1 だけになる。

3. 2 行目以降がすべて 0 ならそれは既約ガウス行列である。第 2 行目以降ですべての成分が 0 ではない最初の列を i_2 とする。行の順序を入れ替え、第 2 行第 i_2 列に零でない項が来るようにする。それを c_2 とする。

4. 第 2 行を c_2 で割る。すると第 2 行の最初の零でない成分は i_2 列目でそれは、1（先頭の 1) である。3 行目以降の零でない成分は、i_2 列目以降である。第 j 行（第 1 行も含めて）の i_2 列目に零でない成分 c があれば、第 2 行の $-c$ 倍を、第 j 行に加えると、第 i_2 列で零でないのは、第 2 行目にある先頭の 1 だけになる。

5. 3 行目以降がすべて 0 ならそれは既約ガウス行列である。第 3 行目以降ですべての成分が 0 ではない最初の列を i_3 とする。行の順序を入れ替え、第 3 行第 i_3 列に零でない成分が来るようにする。それを c_3 とする...
   これを続けていけば良い。

■

定義 3.2 行の基本変形で得た既約ガウス行列の 0 でない行の数をその行列の**階数 (rank)** と言い、行列 A に対して、rank A と書く。

定理 3.2 n 変数の連立一次方程式の解について以下が成立する。

(1) 拡大係数行列と係数行列の階数が異なれば、その連立一次方程式は解を持たない。

(2) 拡大係数行列と係数行列の階数が等しく、その階数が n ならば、その連立一次方程式はただ一組の解を持つ。

(3) 拡大係数行列と係数行列の階数が等しく、階数が $r < n$ ならば、その連立一次方程式の解（の組）は無限個あり、$n - r$ 個の媒介変数を用いて表すことができる。

注.

1. 階数はどの行列にも定義されているものですが、行列の階数はその行列を基本変形して、既約ガウス行列に変形した時の 0 でない行の数です。既約ガウス行列にする道筋はたくさんありますが、どの道筋を通っても、0 でない行の数は一定であることが分かります。（それほど難しくないので、できたら証明します。）もう少し考えると、そこに至る過程は種々あっても、最後に行きつく既約ガウス行列自体はまったく同じであることも分かります。（こちらはちょっと面倒なので、このクラスでは証明しません。）

2. 最後の列にのみ 1 があると言うことは、先頭の 1 が最後の列にあるということ、すなわち、$[0, 0, \cdots, 0, 1]$ といった行があると言うことです。方程式から拡大係数行列を作ったことを考えてみるとこれは、左辺が 0 なのに、右辺は 1 だということを意味しています。たしかにこのようになっていれば、解はありません。

3. 既約ガウス行列の階数は 0 でない行の数ですが、それは「先頭の 1 の数」と言い換えても同じです。0 でない行には必ず先頭の 1 があるわけですから。

4. 方程式の解を書き上げる時は、既約ガウス行列の先頭の 1 のある列に対応する変数はそのままとして、先頭の 1 の無い列に対応する変数を t_1 から順に t_2, t_3 とおいていくと階数を r とした時 $n - r$ のパラメタをおくことができます。最後の列は変数とは関係なかったですね。すると簡単に解を書くことができます。例 3.3 で見てみると、先頭の 1 に対応しないのは x_2, x_5 ですからこれらをパラメターとします。

5. なぜ上のようにおくと良いのでしょうか。これは既約ガウス行列の定義と関係します。第 i 行の先頭の 1 のある列に対応する変数をたとえば x_j とします。すると、第 i 番目の方程式だけに x_j が出てきます。かつその係数は 1 です。かつこの方程式にはパラメタにとった変数以外は出てきません。（なぜだか分かりますか。）ですから x_j はパラメターだけで書くことができるわけです。

例で確認しましょう。

例 3.2 以下の行列を係数拡大行列とする、連立一次方程式の解は何でしょうか。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

変数を x_1, x_2, x_3 とすると、左は、$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$、中は、$x_1 = 2 - 5t, x_2 = 1 - t, x_3 = t$、右は、解なし。

例 3.2 の各行列を B で表し、最後の列を除いた部分を A で表すことにします。A は係数行列です。既約ガウス行列となっていないものはどれでしょうか。最後のものは、既約ガウス行列ではありません。これをさらに変形して既約ガウス行列にすると、他の列（縦の並び）は変わらず最後の列だけ $0, 0, 1$ となります。変数の個数は拡大係数行列の列の数を一つへらしたものですからこれら三つとも $n = 3$ です。最後の列は方程式の右辺に対応するものであることを思い出して下さい。係数行列の列の数が変数の数 n だとしても良いですね。

最初のものは、$n = \text{rank } B = \text{rank } A = 3$ ですから、上の定理により、解をもち解は一組のみ。たしかに、$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ と決まってしまいました。

2 番めのものは、$n = 3 > \mathrm{rank}\ B = \mathrm{rank}\ A = 2$ ですから、上の定理により、解を無限個持ち、それは $n - \mathrm{rank}\ B = 1$ 個のパラメターで表されます。今の場合、先頭の 1 に対応する列は 1 番目と 2 番目ですから それ以外の列に対応する変数は x_3 ですから x_3 を t というパラメターにおきました。ちょうど一個のパラメターで解は $x_1 = 2 - 5t, x_2 = 1 - t, x_3 = t$ と表すことができました。

3 番めのものは、$n = \mathrm{rank}\ B = 3 > \mathrm{rank}\ A = 2$ ですから、解を持ちません。

行列 B と A の違いは最後の列だけですから、最後の列にだけ零でない数がある行があるかどうかで、解があるかどうかが決まることになります。そう考えると、3 番目のものは、既約ガウス行列まで持っていかなくても、解がないことはわかると思います。ですから、上でも既約ガウス行列ではない例が上げてあります。解を読みとるように自動的に書くためには、既約ガウス行列にしたほうが間違いが少ないと思います。階数だけで、解が丁度一個か、パラメターがいくつ必要かなどが決まるわけですから、階数を求めることは重要です。それは、実は、既約ガウス行列まで求めなくてもわかりますが、ここでは、混乱を避けるためすべて既約ガウス行列に持っていくことを勧めておきます。

特に、(3) は少し難しいので、もうすこし複雑な例で確認しましょう。

例 3.3 次の行列を拡大係数行列とする方程式の解は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ -3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

この例では、先頭の 1 に対応しない列は $2, 5$ ですから、$x_2 = t,\ x_5 = u$ とおいています。

3.3.1 定理の証明

さて、定理 3.2 の証明ですが、いますぐにはできません。しかし、既約ガウス行列になっていれば、定理が成り立つことはそれほど難しくはありません。簡単に見てみましょう。まず、階数は既約ガウス行列に変形して、その零でない行の数でしたが、いまは、すでに既約ガウス行列になっていますから、単にその零でない行の数です。

(1) 拡大係数行列の階数と、係数行列の階数が違うとします。係数行列は、拡大係数行列の最後の列を省いた部分でした。階数（零でない行の数）がことなると言うことは、最後の列に 1（先頭の 1）がありあとはすべて零という行があることを意味しています。これは方程式で考えると、$0 = 1$ を意味しているわけですから、解はありません。

(2) 拡大係数行列の階数と、係数行列の階数が同じで、それが変数の数 n と等しいとします。すると、係数行列の部分は、一番下にいくつか 0 ばかりの行が並ぶかも知れませんが、それ以外の部分は、正方形で、対角線に 1 が並んだ形になっていることがわかります。これは、方程式で考えると、$x_1, x_2, \ldots, x_n$ が拡大係数行列の最後の列の対応する部分の値になることを意味していますから、解は一通りに決まります。

(3) 拡大係数行列の階数と、係数行列の階数が同じで r、変数の数は n で $n > r$ となっているとします。係数行列の列の数は変数の数と同じしたから n。先頭の 1 のある列は r 列ですから、先頭の 1 がない列は $n-r$ 列あることになります。その列に対応する変数をパラメタとしておきます。先頭の 1 に対応する変数については、先頭の 1 のある行が表す方程式を考えると、その行の 0 でないものは、先頭の 1 に対応していない変数の列ですから、パラメターで表すことができます。これから、解を $n-r$ 個のパラメターで表すことができることがわかりました。今の決め方から、$n-r$ 個の変数の部分は何をとっても解が一組決まりますから、解は無限個、かつ、$n-r$ 個の媒介変数が必要であることがわかります。