6　極限と関数の連続性

6.1　数列の極限と級数

数列:　数列 (sequence) $1, 1/2, 1/3, \cdots, 1/n, \cdots$ において n を大きくしていくと $1/n$ は小さくなり 0 に近づく。一般に、数列 $\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ が一定の値 α に近づく時、$\{a_n\}$ は α に収束 (converge) する、または $\{a_n\}$ の極限値は α であるといい、記号で

$$a_n \to \alpha\,(n \to \infty),\ \text{または}\ \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

と書く。従って $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ である。収束しない数列は発散する (diverge) という。発散する場合はさらに、「正の無限大に発散」(限りなく大きくなる時)、「負の無限大に発散」(負の値をとりながらその絶対値は限りなく大きくなる時) といい、いずれでもない場合「振動する」ということもある。

例 6.1　1. $\lim_{n\to\infty} n = \infty$: 正の無限大に発散.

2. $\lim_{n\to\infty} -n = -\infty$: 負の無限大に発散.

3. $\lim_{n\to\infty} (-1)^n n$: 発散：振動.

4. $a_n = r^n$ のときは次が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty:\ \text{正の無限大に発散} & \text{if } r > 1 \\ 1:\ 1\ \text{に収束} & \text{if } r = 1 \\ 0:\ 0\ \text{に収束} & \text{if } |r| < 1 \\ \ \text{発散：振動} & \text{if } r \leq -1 \end{cases}.$$

命題 6.1 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$、$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ のとき、以下が成り立つ。

(1) $\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n = c\alpha, \quad (c\ \text{は定数})$

(2) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha + \beta$

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = \alpha\beta$

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad (b_n \neq 0, \beta \neq 0)$

例 6.2　1. $\lim_{n\to\infty} 2 - \frac{5}{n} = \lim_{n\to\infty} 2 - \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} = 2 - 0 = 0.$

2. $\lim_{n\to\infty} \left(3 - \frac{1}{n}\right)\left(4 + \frac{1}{n}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} 3 - \frac{1}{n}\right)\left(\lim_{n\to\infty} 4 + \frac{1}{n}\right) = 3 \cdot 4 = 12.$

3. $\lim_{n\to\infty} \frac{2-n}{3n-5} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n} - 1}{3 - \frac{5}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} - 1}{\lim_{n\to\infty} 3 - \frac{5}{n}} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}.$

4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{0}{1}=0.$

5. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{2n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n^2}}=\frac{1}{2}.$

6. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+3}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2+\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n}}=\frac{\lim_{n\to\infty}n+2+\frac{3}{n}}{\lim_{n\to\infty}1+\frac{2}{n}}=\lim_{n\to\infty}n+2=\infty.$

7. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-3)^n=$ 発散：振動.

8. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{7}\right)^n=0.$

9. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=1.$

級数:　数列 $\{a_n\}$ において、初項（最初の項）a_1 から第 n 項までの和を第 n 部分和といい s_n とおく。

$$s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

$\{s_n\}$ が s に収束するとき 無限級数 (infinite series)

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

は収束し和が s であるといい、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=s$ と書く。$\{s_n\}$ が発散するとき、級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は発散するという。

　公式 (5-1) で $a=1$、$b=r$ とすると、

$$1-r^n=(1-r)(1+r+\cdots+r^{n-i-1}+\cdots+r^{n-2}+r^{n-1})$$

だから

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\sum_{i=0}^{n-1}ar^i=a\sum_{i=0}^{n-1}r^i=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

となる。これより等比数列 $\{a_n=ar^{n-1}\}$ に関して次の結果を得る。

(6–6)　$$\sum_{i=0}^{\infty}ar^i=a\sum_{i=0}^{\infty}r^i=\lim_{n\to\infty}\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\begin{cases}\frac{a}{1-r} & (-1<r<1)\\ \text{発散} & (r<-1,\ \text{or}\ r>1)\end{cases}$$

例 6.3 無限等比級数の収束、発散。

1. $\lim_{n\to\infty}\frac{81}{3^n}=27+9+3+1+\cdots=\frac{81}{1-\frac{1}{3}}=\frac{243}{2}.$

2. $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}2^n=2-4+8-16+\cdots:$ 発散.

収束するということ： もう少し複雑な数列や級数を扱うようになると、直観的な定義では不十分な場合が起こってくる。たとえば 数列 $\{a_n\}$ が α に収束すれば、平均をとってできる数列

$$s_1 = a_1,\ s_2 = \frac{a_1 + a_2}{2},\ s_3 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3},\ \cdots,\ s_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n},\ \cdots$$

は α に収束する。このような問題を扱うためにも n を大きくしていくと数列 $\{a_n\}$ が一定の値 α に近づくということを厳密に定義しておかなければならない。

定義 6.1 数列 $\{a_n\}$ が与えられた時、正の数 ϵ をどのように選んでも、$m \geq m_0$ であれば

$$|a_m - \alpha| < \epsilon$$

が成立するように m_0 を見つけることができるとき（m_0 は ϵ によって変わってくる)、数列 $\{a_n\}$ は α に収束するといい、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

と記す。

一般に $|a+b| \leq |a| + |b|$ が成り立つ。これと上の定義を用いて、命題 6.1 (2) を証明してみよう。

証明： 任意に正の数 ϵ が与えられたとする。このとき $m \geq m_0$ であれば

$$|(a_m + b_m) - (\alpha + \beta)| < \epsilon \tag{6–7}$$

が成立するような m_0 を見つけることができることを示す。

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ だから、正である $\epsilon' = \epsilon/2$ について、$m \geq m_1$ であれば

$$|a_m - \alpha| < \epsilon' \tag{6–8}$$

が成立するような m_1 を見つけることができる。同様に、$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ だから、$m \geq m_2$ であれば

$$|b_m - \alpha| < \epsilon' \tag{6–9}$$

が成立するような m_2 を見つけることができる。ここで m_1、m_2 の大きい方を m_0 とすると、$m \geq m_0$ であれば (6–8) も (6–9) も満たされる。したがって、

$$|(a_m + b_m) - (\alpha + \beta)| \leq |a_m - \alpha| + |b_m - \beta| < \epsilon' + \epsilon' = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

が成り立つ。したがって、$m \geq m_0$ であれば (6–7) を満たすような m_0 を見つけることができた。定義からこれは

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \alpha + \beta$$

がを意味する。 ■

上の議論では、収束の定義から ϵ が**何であれ**正の数であれば、それに対応してある条件をみたす、m_0 をとることができることが重要であった。ϵ は何であっても良かったので、$\epsilon' = \epsilon/2$ についても条件を満たす数を取ることができることを用いて、証明することができた。

6.2　関数の極限・連続性

定義 6.2 関数 $f(x)$ において 変数 x が a と異なる値をとりながら a に近づくとき、$f(x)$ が一つの値 α に近づくならば x が a に近づくときの $f(x)$ の極限値は α であるといい、

$$f(x) \to \alpha \ (x \to a) \text{ または } \lim_{x \to a} f(x) = \alpha$$

で表す。

　すなわち、ある区間 $c < x < d$ で定義された関数 $f(x)$ が与えられた時、正の数 ϵ をどのように選んでも、$0 < |x-a| < \delta$ であれば

$$|f(x) - \alpha| < \epsilon$$

が成立するように δ を見つけることができるとき（δ は ϵ によって変わってくる）、α は、関数 $f(x)$ の a における極限であるといい、

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$$

と記す。

命題 6.2 $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$、$\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ のとき、以下が成り立つ。

(1) $\lim_{x \to a} cf(x) = c \lim_{x \to a} f(x) = c\alpha \quad (c \text{ は定数})$

(2) $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = \alpha + \beta$

(3) $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = \alpha\beta$

(4) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta} \quad (g(x) \neq 0,\ \beta \neq 0)$

　関数 $f(x) = x^2 + 1$ において変数 x が 2 と異なる値をとりながら 2 に近づく時 $f(x)$ は値 $f(2) = 5$ に近づく。$|a+b| \leq |a| + |b|$ を用いると、2 の近くでは $|x| < 3$ として良いから、

$$|f(x) - 5| = |x^2 + 1 - 5| = |x^2 - 4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2||x+2| \leq |x-2|(|x|+2) < 5|x-2|$$

であるから、$x \to 2$ すなわち $|x-2| \to 0$ のとき $|f(x) - 5| \to 0$ となる。従ってこの場合、$f(x)$ の 2 における極限値は、$x = 2$ における値 $f(2)$ になっている。

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} x^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5 = f(2).$$

定義 6.3 一般に関数 $f(x)$ において、$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ が成り立つ時、関数 $f(x)$ は $x = a$ で連続 (continuous) であるという。また、関数が定義されている各点で $f(x)$ が連続であるとき、$f(x)$ は連続である、または連続関数であるという。

このことは、a に収束する任意の数列 $\{a_n\}$ について、次が成り立つことと同値である。

$$f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(a_n).$$

すなわち、f が lim 記号と「交換可能」であると表現することもできる。

例 6.4 定数関数 c、多項式（その他 $\sin x$、$\cos x$、e^x など）は、各点で連続、また、連続関数の和、差、定数倍、積も、連続関数。商も、分母が零にならない範囲で連続関数である。

例 6.5

1. $f(x) = (x^2+7x)/(x+1)$ の -2 での極限値と考える。x^2+7x も $x+1$ も多項式だから $x=-2$ で連続でかつ、分母の $x+1$ は $x=-2$ の近くで 0 にならないから、

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+7x}{x+1} = \frac{\lim_{x\to-2} x^2+7x}{\lim_{x\to-2} x+1} = \frac{(-2)^2+7(-2)}{(-2)+1} = \frac{-10}{-1} = 10.$$

この場合は $f(-2)=10$ だから $f(x)$ は $x=-2$ で連続である。

2. $g(x) = (x^2-5x+4)/(x-4)$ の 4 での極限値を考える。$x=4$ では分母が 0 になるので、$g(x)$ は $x=4$ で定義されていない。しかし、$x\neq 4$ では定義されている。分子は $x^2-5x+4 = (x-4)(x-1)$ だから $x\neq 4$ では $g(x) = x-1$ になる。従って、

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x-4} = \lim_{x\to 4} x-1 = 4-1 = 3.$$

関数の a での極限は、$x\neq a$ で x が a に近づいて行くときの $g(x)$ の値が α に近づくとき $g(x)\to\alpha$ というのであった。$x\neq a$ の条件に注意。この関数は $x=4$ で定義されていないので、連続性は問えないが、別途 $g(4)=3$ と定義すれば、$g(x)$ は $x=4$ で連続。実際には分母が 0 になるのは、$x=4$ の時だけだったから、$g(x)$ は連続関数（すべての実数で連続）である。$g(4)=0$ などと定義すると、$g(x)$ はすべての実数で定義されているが、$x=4$ では連続ではない。となる。

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)}{x} = \lim_{x\to 0} x-1 = -1.$

4. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x+2 = 2+2 = 4.$

5. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+2 = 1+2 = 3.$

6. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+1} = \frac{2^2+2\cdot 2+4}{2+1} = 4.$

命題 6.3 閉区間 $[a,b]$ 上で連続な関数 $f(x)$ において、C を、$f(a)$ と、$f(b)$ の間の値とすると、$f(c)=C$ となる点 c が、区間 $[a,b]$ 内にある。

例 6.6 $f(x)$ を奇数次数の多項式とすると、$f(x)=0$ は必ず根をもつ。

例 6.7 $f(x) = 4x^5 - 10x^4 - 20x^3 + 40x^2 + 16x - 15$ とする。$f(-2) = -15$、$f(-1) = 15$、$f(0) = -15$、$f(1) = 15$、$f(2) = -15$、$f(3) = 15$。従って、5 つの区間 $[-2, -1]$、$[-1, 0]$、$[0, 1]$、$[1, 2]$、$[2, 3]$ の内部で、$f(x) = 0$ となる点、すなわち根を少なくとも一つずつ持つ。$f(x)$ は、5 次多項式だから、高々 5 個の実根を持つ。すなわち、この 5 個以外には、根を持たず、これらの区間に丁度一つずつあることも解ります。(なぜでしょう。)

命題 6.4 閉区間 $[a, b]$ 上で連続な関数 $f(x)$ は、$[a, b]$ 上の最大・最小をとる。

Note. 上の命題で、閉区間でない場合は、必ずしも、最大・最小を持つとは限らない。

例えば、$f(x) = -x^2 + 2x + 1$、$(0 < x < 2)$ とすると、$1 < f(x) \leq 2 = f(1)$ だから、区間 $(0, 2)$ で最大値は取るが、最小値は取らない。

6.3 三角関数

半径 1 の円上の点で x-軸から反時計回りに角度をはかり、角度 x の点の座標を $(\cos x, \sin x)$ で表す。また $\tan x = \sin x / \cos x$ で表す。角度は、今後弧度 (radian) を用いる。弧の長さで角度を表す表し方で、円周の長さは 2π だから次のようになる。

$$0 = 0^\circ,\ \frac{\pi}{6} = 30^\circ,\ \frac{\pi}{4} = 45^\circ,\ \frac{\pi}{3} = 60^\circ,\ \frac{\pi}{2} = 90^\circ,\ \pi = 180^\circ,\ 2\pi = 360^\circ$$

定義から簡単に次のことが分かる。

(1) $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$

(2) $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

(3) $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$。慣習として $(\sin x)^n$ を $\sin^n x$、$(\cos x)^n$ を $\cos^n x$ と書くことが多い。

次の公式は三角関数の加法公式と呼ばれる。

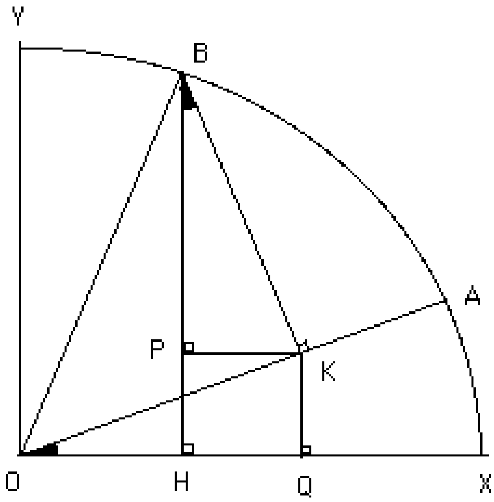
(4) $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$、$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$。

(5) $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$、$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$。

三角関数の加法公式の証明:

(6–10) $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,\ \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

O を中心とした半径1の円弧を考え、x-軸と交わる点を X とし、A, B を $\angle AOB = x$、$\angle AOX = y$、$\angle BOX = x + y$ となるようにとる。B から OX に下ろした垂線が OX と交わる点を H、B から OA に下ろした垂線が OA と交わる点を K、K から OX に下ろした垂線が OX と交わる点を Q、K から BH に下ろした垂線が BH と交わる点を P とする。まず $\angle KBP = \angle KOQ = y$ であることを示す。$OX//PK$ で $\angle KOQ$ と $\angle OKP$ は錯角だから等しい。$\angle KBP + \angle BKP = \pi/2\ (= 90^\circ)$、$\angle OKP + \angle BKP = \pi/2 (= 90^\circ)$ だから $\angle KBP = \angle OKP = \angle KOQ = y$ となる。



$\triangle BOH$ を考えると $\overline{BH} = \sin(x+y)$。一方 $\triangle KBP$ において $\overline{BK} = \sin x$、$\angle KBP = y$ だから $\overline{BP} = \sin x \cos y$ である。今度は、$\triangle KOQ$ において $\overline{OK} = \cos x$ だから $\overline{KQ} = \cos x \sin y$。$\overline{PH} = \overline{KQ}$ だから次の式が得られる。

$$\sin(x+y) = \overline{BH} = \overline{BP} + \overline{PH} = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

従って、最初の式が得られた。後の式も $\overline{OH} = \overline{OQ} - \overline{PK}$ を表すことにより得られる。$x + y$ が $\pi/2$ より大きいときについても同様の議論ができる。 ■

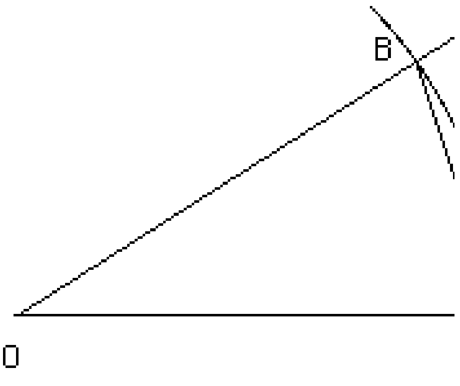
極限:

(6–11)
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \text{ ただし } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

O を中心とした半径1の円弧を考え、x-軸と交わる点を X とし、B を $\angle BOX = x$ となるように円弧上にとる。また X を通る OX の垂線と OB の交わる点を A とする。ここで $\triangle BOX$、扇形 OBX、$\triangle AOX$ の面積の2倍を求めると次の式を得る。

$$\sin x < x < \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

これより求める式を得る。



(6–12)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

例 6.8 1. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \frac{5}{3} \lim_{5x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = \frac{5}{3} \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{5}{3}.$

2. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\frac{3x}{\sin 3x} = \frac{2}{3}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z} = \frac{2}{3}.$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^2}{x^2(1+\cos x)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)^2}{x^2} = \frac{1}{2}.$

6.4　指数関数

$a > 0$ とするとき、$y = a^x$ となるとき $x = \log_a y$ と書く。$a^0 = 1$。

定義から次のことが分かる。

(1) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y.$

(2) $(a^x)^y = a^{xy}.$

(3) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y.$

(4) $\log_a x^y = y \log_a x.$

$a = e$ の時が特に重要である。

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.7182818284590\cdots \tag{6–13}$$

$(1+1)^1 = 2,\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2.25,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.37\cdots,\ \left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} = 2.59\cdots,\ \left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = 2.61\cdots,\ \left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} = 2.71\cdots$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1. \tag{6–14}$$

指数関数の身近な例:

1. $10^7 m$ 地球の直径、$10^{25} m$ 銀河団、$10^{27} m = 1000$ 億光年 宇宙の果て。

2. 1 等星は、2 等星の 2.51 倍の明るさ、2 等星は、3 等星の 2.51 倍の明るさ、3 等星は、4 等星の 2.51 倍の明るさ、4 等星は、5 等星の 2.51 倍の明るさ、5 等星は、6 等星の 2.51 倍の明るさ、したがって、1 等星は、6 等星の 99.63 倍の明るさ。

3. 音の大きさ：60 ホンは、エネルギーに勘算すると、70 ホンの 10 分の 1、80 ホンの 100 分の 1 。

4. マグニチュードは、1 違うとエネルギーは 32 倍。マグニチュード 6 は広島型の原子爆弾およそ 1 個のエネルギーと同じ。阪神大地震 マグニチュード 7.2. $32^{1.2} = 64$。

   「1995 年 1 月 17 日朝 5 時 46 分に起こった阪神・淡路大震災はマグニチュード 7.2 で、伊勢湾台風の死者数を上回る戦後最大の災害となりました。　この大震災のエネルギーは広島原爆の 67 発分です。　広島原爆は日本人にとって巨大な破壊力の象徴のようなものですが、その 67 倍ですから、阪神大震災の破壊エネルギーがいかに大きかったかを示しています。なお、1923 年の関東大震災は阪神大震災の 11 倍、広

島原爆の 750 発分でした。火災を中心に死者 10 万人を数え、阪神大震災も 5500 人余りの犠牲を生み出しました。

しかし、広島原爆は阪神大地震のエネルギーの 67 分の 1 の小ささであったにもかかわらず、死者数は 30 倍を超えています。広島原爆は 1945 年 8 月 6 日朝 8 時 15 分に投下されてから、その年の内だけで 13〜15 万人、そして放射線後遺症などで亡くなった人を含めると約 20 万人が生命を失っています。　これは明らかに地震は人を殺す目的で起こるわけではないけれども、核兵器は人を能率よく殺す意図を持って、条件を選んで使われるからにほかならないのです。」(安斎　育郎（立命館大学教授・国際平和ミュージアム館長）http://www.ask.ne.jp/~hankaku/html/anzai.html)

5. 科学の世界、特に、生物の世界では、指数的な関数が非常によく現れます。$f(x) = e^{ax}$ というような形のものです。すると、$\log f(x) = ax$ となりますから、対数をとると比例する関係になっています。細胞分裂などを考えても、二つずつに分かれていくことなどを見ても、自然な気がします。そこで、データを log をとって、表すことがよくあります。

6. 「人間の感覚は刺激（エネルギー）の強さの対数に比例する。」

$$(\text{感じる刺激の強さ}) = c \cdot \log\ (\text{刺激のエネルギー強さ})$$

（心理学の Weber の法則）
例：「2 倍の欲望を満たすには、10 倍の刺激が必要。」（これほんと？）上の理解が正しいと、「刺激のエネルギーが 2 乗になると、感じる刺激の強さが倍になる。」

7. 「トイチ」（10 日で 1 割）$(1.1)^{36} = 30.91268\ldots$：トイチでお金を借りると、1 年後には、31 倍になっています。
「トサン」（10 日で 3 割）$(1.3)^{36} = 12646.21855\ldots$：トサンだと 12646 倍。このぐらいになると、借りた方も借りる方もいくらになったか計算できませんね。

8. 必ず b 倍以上の配当金のある賭けに、前回の掛金の r 倍ずつ賭けていき、一回勝ったら止める。もし、$b \geq r/(r-1)$ が満たされていれば必ず儲かる。

最初の掛金を a 円とし、n 回目で勝ったとする。

$$a(1 + r + \cdots r^{n-1}) = \frac{a(r^n - 1)}{r-1} < \frac{ar^n}{r-1} = ar^{n-1}\frac{r}{r-1} \leq b \cdot a \cdot r^{n-1}.$$

$$100(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64) = 100 \times 127 = 12,700$$

「頭脳の数的リストラクション 思考力をつける 数学」深川和久（ふかがわやすひさ）著、永岡書店 (ISBN4-522-42098-6, 2002.11.10）を参照。

コンピュータ関連の仕事をしている友達が税金のとり方の提案をしていた。消費税はそれぞれのお札を使うことで支払うことにする。

1K 円札、1M 円札、1G 円札、... というのはどうだろうか。消費税が 3% 時代の話しですが。

$$1K = 2^{10} = 1,024,\ 1M = 2^{20} = 1,048,576,\ 1G = 2^{30} = 1,073,741,824$$

たとえば、1000 円のもののときは、$1K$ 円札ではらう。すると、24 円、税金を払うことになる。100 万円以上のものを買う時は、$1M$ 円札を使う。すると、税率は 4.9% になる。多少累進課税になりますが、税率を変えるときは、もう大変。