

8 微分の応用：関数とグラフ

8.1 極限の計算

連続関数の商 $f(x)/g(x)$ の形になっているときの極限について復習しましょう。まず $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ すなわち、分母が 0 にならない時は、

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}, \quad \text{if } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a) \neq 0.$$

また、 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ であつ、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$ のときは、極限は存在しませんでした。この場合は、さらに無限大 $+\infty$ になるか負の無限大 $-\infty$ になるか、またはどちらにも決まらないかを調べることもありますが、ともかく、この場合は、発散 (diverge) といつて、極限が一定の数になりません。

問題なのは、分母も分子も 0 になってしまう場合でした。この場合は、すぐには、極限が決定できません。

さて、前に例で取り上げたものにつぎのようなものがありました。

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x - 1)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} x - 1 = 4 - 1 = 3.$$

この問題では、 x に 4 を代入すると、分母も分子も 0 になっていました。そこで何らかの手を講じないといけなかったわけです。この場合は、因数分解をすることができ、 x は $x \neq 4$ を維持しながら 4 に近づいていくことから、 $x - 4$ をキャンセルして、求める結果を得ました。

さて、 $f(x) = x^2 - 5x + 4$ とすると、 $f(4) = 0$ です。そこで、 $f'(4)$ の定義を書いてみましょう。

$$f'(4) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 4}$$

となっています。上で $f(4) = 0$ を使いました。この最後の式は、最初に考えた極限ですから、結局この極限は $f'(4)$ だということになります。微分は簡単に計算できることも多くこの場合も、

$$f'(x) = (x^2 - 5x + 4)' = 2x - 5 \quad \text{これより } f'(4) = 3.$$

たしかに答えも同じになりました。

これは偶然でしょうか。連続関数の商の極限で $0/0$ すなわち、

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{かつ } f(a) = g(a) = 0$$

の場合を考えましょう。 $f(x)$ も $g(x)$ も $x = a$ で微分係数をもつ、すなわち微分可能だとすると、分母・分子を $x - a$ で割り $f(a) = g(a) = 0$ に注意すると、

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

となり、この場合も分子・分母をともに微分し $x = a$ での値を求めたものになっています。ですから $g'(a) \neq 0$ ならばこのようにして、極限を求めることができます。さらに、 $f(x)$ も $g(x)$ も $x = a$ で何回も微分することが可能だとすると（例えば多項式などはそうですが）導関数も連続ですから、

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

すなわち、分子・分母を微分しそれについて、考えれば良いことがわかります。そう考えると、最初の問題も、 $f(x) = x^2 - 5x + 4$ などとおかなくても、

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x^2 - 5x + 4)'}{(x - 4)'} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x - 5}{1} = 3.$$

とすることができることがわかります。

因数分解を考えないですむメリットがあります。しかし、 $0/0$ の形であることを確かめることは必要です。

(証明を、少し工夫すると、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ 、 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ の場合も、同様のことが言えます。)

例 8.1 1. まず分子・分母がともに 0 に近づくことを確認して下さい。

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^3 - 8)'}{(x^2 - x - 2)'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2}{2x - 1} = \frac{12}{3} = 4.$$

2. これも分子・分母がともに 0 に近づく場合ですが、微分をとっても分子・分母がともに 0 に近づくのでもう一度微分をとります。

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - 2x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{3x^2 - 4x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{6x - 4} = \frac{6}{2} = 3.$$

3. 次の例は分子が 0 に近づかないので、極限が存在しないのですが、微分をとると違うものになってしまう例です。

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x - 2}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 1}{1} = 1$$

4. 次の例は分母が 0 に近づかないので、普通に極限がわかるのですが、微分をとると違うものになってしまう例です。

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = \frac{-2}{2} = -1 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 1}{1}.$$

5. $e^0 = 1$ 、 $(e^x)' = e^x$ でした。つぎの例は、 $0/0$ 型ですから分母・分子を微分して求めることができます。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1.$$

ただこの極限は、 e^x の微分を求める時に使ったものでした。ここで微分を使うのは、問題ですが、実際にいろいろな場面で、この微分を使う極限の計算はとても便利です。

6. 三角関数などを含む難しいものに適用すると非常に効果的です。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

このばあいは、一回の微分では、決定できず、また $0/0$ となっているので、もう一度微分、さらにもう一度と何回も微分して、分母が 0 ではなくってから求めています。もう一回微分するとおかしいことになります。あくまでも $0/0$ の場合に適応できるものでした。

8.2 極大・極小

定義 8.1 点 x が、点 a に十分近いときは、常に、 $f(a) > f(x)$ が成り立つとき、 $f(x)$ は、 $x = a$ で、極大になるといい、 $f(a)$ をその極大値、点 a を、極大点という。同様に、点 x が、点 a に十分近いときは、常に、 $f(a) < f(x)$ が成り立つとき、 $f(x)$ は、 $x = a$ で、極小になるといい、 $f(a)$ をその極小値、点 a を、極小点という。極大値と極小値を合わせて極値という。

極大・極小は最大・最小とは違います。局地的に見るとそのあたりでは一番山のてっぺん、または谷底と言う意味です。

命題 8.1 $f(x)$ が連続、かつ微分可能とする。このとき次が成立する。

- (1) $x = c$ で極値（極大または極小値）を持てば、 $f'(c) = 0$ 。
- (2) $f'(c) > 0$ ならば、 $f(x)$ は $x = c$ で増加。
- (3) $f'(c) < 0$ ならば、 $f(x)$ は $x = c$ 減少。
- (4) 常に $f'(x) = 0$ ならば、 $f(x)$ は定数関数。

証明. 次のことを思い出しましょう。

$$h(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \begin{cases} > 0; & x < c \text{ かつ } f(x) < f(c) \text{ の時: 増加} \\ > 0; & c < x \text{ かつ } f(c) < f(x) \text{ の時: 増加} \\ < 0; & x < c \text{ かつ } f(x) > f(c) \text{ の時: 減少} \\ < 0; & c < x \text{ かつ } f(c) > f(x) \text{ の時: 減少} \end{cases}$$

- (1) $f(c) > f(x)$ すなわち、 c で極大のときは、 x が左から c に近づき c を通り過ぎるとすると、増加から減少に変わるわけですから、上の四つのケースのうち、1番目と4番目が起こりますから、 $h(x)$ は $x < c$ のとき正、 $c < x$ の時負。したがって、 $\lim_{x \rightarrow c} h(x)$ は存在するとすると、 0 以外にはなり得ません。この極限が $f'(c)$ でしたから $f'(c) = 0$ となります。 $f(c) < f(x)$ すなわち、 c で極小のときも同様です。考えてみて下さい。この場合は、2番目と3番目が起こります。
- (2) この場合は、 x が c に近いところでは、 $h(x) > 0$ となっているわけですから、1番目と2番目が起こっています。すなわち増加していることがわかります。
- (3) 上と同様にしてわかります。

(4) 増加も減少もしていないことがわかりますので、一定になっています。そのような関数を定数関数といいます。 ■

$f'(x)$ の増加、減少は、 $f'(x)$ の導関数 $f''(x)$ ($f'(x)$ をもう一度微分した、 $(f'(x))'$ をこのように書く) によって分かることを考えれば、次のことが分かります。

命題 8.2 $f(x)$ は 2 回微分可能な関数とする。このとき次が成立する。

(1) $f'(c) = 0$ 、 $f''(c) < 0$ ならば、関数 $f(x)$ は、 c で極大値 $f(c)$ を持つ。

(2) $f'(c) = 0$ 、 $f''(c) > 0$ ならば、関数 $f(x)$ は、 c で極小値 $f(c)$ を持つ。

証明. (1) $f'(c) = 0$ かつ $f''(c) < 0$ とする。 $f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数ですから、 $f''(c) < 0$ ということは、 $f'(x)$ は $x = c$ において減少していることがわかります。減少して $f'(c) = 0$ ということは、 $x = c$ を境にして、 $x < c$ では $f'(x) > 0$ 、 $x > c$ では $f'(x) < 0$ となっています。つまり、 $x < c$ で x が c に近づいてくるとき (すなわち c に左から近づいてくるとき) は $f(x)$ は増加しており、 $x = c$ をすぎて $x = c$ から遠ざかっていくときは減少していることを意味しています。これは、 $x = c$ で $f(x)$ は極大値をとることを意味します。

(2) 同様です。証明を考えてみてください。 ■

例 8.2 関数 $f(x) = x^4 - 8x^2 + 10$ がどこで極大・極小になるかを考えましょう。命題 8.1 (1) によって、極大または極小になる点では、導関数の値が 0 になるわけですから、まず $f'(x)$ を求めます。さらに、 $f'(x) = 0$ となる点で、極大になるのか、極小になるのか、どちらでもないかを判断するため、 $f''(x)$ を計算しておきます。

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x+2)(x-2), \quad f''(x) = 12x^2 - 16.$$

この計算から $f'(x) = 0$ となるのは $x = -2, 0, 2$ です。それぞれの x での $f''(x)$ の値は、 $f''(-2) = 32 > 0$ 、 $f''(0) = -16 < 0$ 、 $f''(2) = 32 > 0$ となりますから、命題 8.2 より $x = -2$ で極小値 $f(-2) = -6$ 、 $x = 0$ で極大値 $f(0) = 10$ 、 $x = 2$ で極小値 $f(2) = -6$ をとることがわかります。表に書くと次のようになります。

x		-2		0		2				
$f(x)$		↘	極小	↗	↗	極大	↘	↘	極小	↗
$f'(x)$		-	0	+	+	0	-	-	0	+
			↗			↘			↗	
$f''(x)$		+		-		+			+	

$f'(c) = 0$ で $f''(c) = 0$ ならばどうでしょうか。この場合は、この方法では判定できませんがさらに、 $f'''(c)$ を調べて、これが正の場合には同様の考え方で $f(x)$ は $x = c$ で増加していることがわかります。負の場合には減少しています。したがって、極値をもちません。すなわち、極大にも、極小にもなっていません。 $f(x)$ が何回でも微分可能な時は、そこでの値が 0 にならないところまで微分をしそこから出発すると、 $x = c$ で増加しているか、減少しているか、極大か、極小か判断することができます。

例 8.3 関数 $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x$ がどこで極大・極小になるかを考えましょう。まず $f'(x)$ を求めます。さらに、 $f'(x) = 0$ となる点で、極大になるのか、極小になるのか、どちらでもないかを判断するため、 $f''(x)$ を計算しておきます。

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2 = 2(x-1)^2(2x+1), \quad f''(x) = 12x^2 - 12x.$$

$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数、すなわちこれを微分したものです。因数分解したものを積の微分をつかって微分することもできますが、ただ導関数が必要な時は、展開してあるもとの式を微分したほうが簡単です。この計算から $f'(x) = 0$ となるのは $x = -1/2, 1$ です。それぞれの x での $f''(x)$ の値は、 $f''(-1/2) = 9 > 0$, $f''(1) = 0$ となりますから、 $x = -1/2$ で極小値をとることがわかりますが、 $f''(1) = 0$ ですから $x = 1$ では、極大か極小か増加しているのか減少しているのかこれではわかりません。そこでもう一度微分してみると $f'''(x) = 24x - 12$ ですから $f'''(1) = 12 > 0$ です。 $f'''(x)$ は $f''(x)$ を微分したものでした。導関数の値が正なのですから、 $f''(x)$ は $x = 1$ で増加しておりかつ $f''(1) = 0$ ですから、 x に近いところでは、 $x < 1$ では $f''(x) < 0$ 、 $x > 1$ では $f''(x) > 0$ であることがわかります。すなわち、 $f'(x)$ は $x < 1$ では減少、 $x > 1$ では増加です。 $f'(1) = 0$ ですから、 $x < 1$ では $f'(x) > 0$ かつ $x > 1$ では $f'(x) > 0$ すなわち、 $f(x)$ は c の近くではいつでも増加していることがわかります。したがって極大でも極小でもありません。表に書く次のようになります。

x	$-1/2$	1
$f(x)$	\searrow 極小 \nearrow	\nearrow 増加 \nearrow
$f'(x)$	$-$ 0 $+$	$+$ 0 $+$
$f''(x)$	\nearrow $+$ \searrow	\searrow 0 \nearrow
$f'''(x)$		$+$

定義 8.2 関数 $f(x)$ が、点 c において、接線を持ち、 c のごく近くで、 $f(x)$ のグラフが、接線の上であれば、 $f(x)$ は、点 c において、下に凸、接線の下であれば、上に凸という。 $f(x)$ のグラフが、接線の上から下、又は、下から上に移るとき、この点を、変曲点という。

命題 8.3 $f(x)$ が、开区間 (a, b) において、2階導関数 $f''(x)$ を持てば、次が成立。

- (1) $f''(x) > 0$ ならば、 $f(x)$ は、开区間 (a, b) で、下に凸。
- (2) $f''(x) < 0$ ならば、 $f(x)$ は、开区間 (a, b) で、上に凸。
- (3) $f''(c) = 0$ かつ、 $f''(x)$ の符号（正であるか、負であるか）が点 c で変われば、 $x = c$ は、変曲点。