9　不定積分と定積分

9.1　原始関数と不定積分

定義 9.1 関数 $F(x)$ の導関数が、$f(x)$ に等しいとき、すなわち、$F'(x)=f(x)$ が成り立つとき、$F(x)$ を、$f(x)$ の原始関数と言う。

$F(x)$、$G(x)$ を共に、$f(x)$ の原始関数とする。すると、$F'(x)=G'(x)=f(x)$ であるから、$(F(x)-G(x))'=0$ となる。導関数が、常に、0 となる関数は、命題 8.1 (4) によって、定数となる。従って、$G(x)=F(x)+C$ なる定数 C が存在する。逆に、$G(x)=F(x)+C$ と表せる関数は、$f(x)$ の原始関数である。このことをふまえ、原始関数の代表という意味で、$f(x)$ の不定積分と呼び、次のように書く。

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

ここで、C を積分定数と言う。(C を省略して書くことも良くある。)

例 9.1 ものを投げ上げたり、落下させたりする時（放物運動)、時刻 t での地上からの高さを $h(t)$ で表すとものの大きさや重さには関係なくいつでも $h(t)=at^2+bt+c$ の形を大体しているが、a の値はいつでも同じだという観測された (G. Galilei)。垂直方向の速度は $h(t)$ の平均変化率 $v(t)=h'(t)=2at+b$ に等しく、速度の平均変化率、すなわち加速度は $v'(t)=h''(t)=2a$ となる。a の値が一定だということは、下向きの加速度 $-2a$ が一定で、これが重力加速度といわれ $g=9.8m/\mathrm{sec}^2$ となっている。

逆に加速度が α と一定の場合は $h''(t)=\alpha$ だから、$h'(t)=\alpha t+\beta$、$h(t)=\frac{\alpha}{2}t^2+\beta t+\gamma$ となります。β、γ は何でしょうか。数学的には積分定数ですが、$h'(0)=\beta$ ですから、この場合は $t=0$ の時の速度。$h(0)=\gamma$ ですから γ は $t=0$ の時のものの高さだということがわかります。$h''(t)=-g$ というような方程式（$h(t)$ を求めると言う意味で）を微分方程式といい、これらの条件 $h'(0)=\beta, h(0)=\gamma$ を初期条件と言います。

例 9.2 雨滴の落下を考えてみましょう。すると前の例のような式で考えると現実と合わないことが出てきます。高度 2000 メートルから降ってくる雨粒を考えてみましょう。(一般的には 1000 メートルぐらいだそうですが）上の例で求めた式から

$$0=h(t)=-\frac{9.8}{2}t^2+2000,\ \text{より}\ t^2\sim 400,\ t\sim 20.$$

落ちてくるのに 20 秒かかりますから、そのときの速度は $9.8\cdot 20=196(m/sec)\sim 720(km/h)$ これは速過ぎます。電車で雨粒の動きを観察したことがありますか。電車が速いとかなり斜めにあとがつきます。わたしは電車の一番前の運転席が見えるところに乗ってスピードメータを見ながら、かつ横の窓にあたる雨粒の角度をはかり、ちょうど 45 度になった時の速度をはかろうとして観察していたことがあります。実際には風があったり、雨粒によって動きが違ったりしますが、電車がスピードを上げるとすぐ、45 度よりも大きな角度になり、平行に雨粒が飛ぶようになります。ということは、電車のスピードよりかなり遅いということです。これは、空気抵抗を考えていないために起きた問題です。空気抵抗を考えると速度のおそいときは粘性抵抗というものが働き、速さに比例して進む方向と逆向きの力が働きます。

$$v'(t)=-g-kv(t),\ v=-\frac{g}{k}+Ce^{-kt}=-\frac{g}{k}+(v_0+\frac{g}{k})e^{-kt}.$$

これで計算してみると、1mm の雨粒の速度は大体 432km/h になります。これもまだ速過ぎます。速度が速くなると慣性抵抗というのがはたらきこれは、速度の二乗に比例してはたらきそれを勘案すると、23.7km/h 程度になり大体実測とあっていることがわかります。結局、物理ではすべての情報を入れると複雑になり過ぎるので、条件をいろいろと入れて、たとえば空気抵抗がないとか、十分ゆっくりだということにして、求めて、それが実験結果とあっているかあっていないかを見て修正していくわけです。現実が大切ですから。つまり常に厳密には考えていないということも言っているわけです。厳密に考えていないから、かえってきれいな結果が得られ、万有引力の法則とか $f = m\alpha$ の様なことから問題を考えることができるようになるわけです。数学では、最初から設定した枠組のなかで、どれだけのことが言えるかを考えるわけです。厳密さを一番大切にするわけです。そう言った違いから、物理と数学はつねに、相互依存していながら全くちがった分野として「お互いに尊敬しあう？」関係にあります。でも、数学で厳密にあることが証明でき、大発見というとき、物理ではそんなことは、50 年前から知っていたなどと酷評されることもありますが。

この微分･積分はイギリスのニュートン（1642ー1727）とドイツのライプニッツ（1646ー1716）によって基礎ができました。この二人とも数学と物理学両方に大きな貢献をした人です。

例 9.3 $f'(x) = 2x + 1$、$f(0) = 2$ となる関数を考えるとする。$x^2 + x$ の導関数は $2x + 1$ だから $f(x) = x^2 + x + C$ と書けます。$f(0) = 2$ だから $C = 2$ となり、$f(x) = x^2 + x + 2$ を得、一つの関数が決まります。

例 9.4 $(x^n)' = nx^{n-1}$ がすべての数について成立しました。ただし、$n = 0$ のときは、$1' = 0$ です。これを用いるといろいろな関数の原始関数がもとまります。

1. $\displaystyle\int 3x^2 dx = x^3 + C$
2. $\displaystyle\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C.$
3. $\displaystyle\int 8x^3 - 3x^2 + 2dx = 2x^4 - x^3 + 2x + C.$

例 9.5 一回微分して 0 になる関数は定数でした。二回微分して（微分したものをもう一度微分して 0 になる関数は定数関数の原始関数ですから一次関数であることがわかります。$D^m f(x)$ で $f(x)$ を m 回続けて微分したものを表すとすると、$D^m f(x) = 0$ ならば $f(x)$ は $m - 1$ 次の多項式であることがわかります。

$$D^m f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \text{ は次数 } m-1 \text{ の多項式}$$

$\Leftarrow$ は微分をすれば $(x^n)' = nx^{n-1}$ からわかります。逆の $\Rightarrow$ は $f'(x) = 0$ なら $f(x) = c$ ということと、$(x^n)' = nx^{n-1}$ からわかります。こちらは積分の考え方です。

前に似たものがありました。$\Delta^m f(x) = 0$ なら $f(x)$ は次数 $m - 1$ の多項式で表すことができるというものでした。似ていますね。数学では似た部分を見て、一方で成り立つことがここでも成り立たないか考えたり、さらにもう一段上に統一理論がないかを考えたりします。

例 9.6　1. $\int e^x dx = e^x + C$

2. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C,\ (\text{ if } \alpha \neq -1)$

3. $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$

4. $(\int \sin x dx = -\cos x + C)$

5. $(\int \cos x dx = \sin x + C)$

練習問題 9.1　1. $\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} + C = -\frac{1}{x}$

2. $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$

3. $\int (x^2 - 2e^x) dx = \frac{1}{3}x^3 - 2e^x + C$

4. $\int (6\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}) dx = 4x^{3/2} - 2x^{1/2} + C = 4x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C$

5. $(x^2e^{-x})' = 2xe^{-x} + x^2e^{-x}(-1) = (2-x)xe^{-x}$ だから、
$\int (2-x)xe^{-x} dx = x^2e^{-x} + C$

6. $(\int (4\sin x + \cos x) dx = -4\cos x + \sin x + C)$

9.2　不定積分の計算

置換積分　$F'(x) = f(x)$ であるとすると、$\frac{d}{dt}F(\phi(t)) = f(\phi(t))\phi'(t)$ であるから、$x = \phi(t)$ とおいたときは、

$$\int f(x) dx = \int f(\phi(t))\phi'(t) dt$$

となる。

例 9.7　1. $\frac{d}{dt}\phi(t)^\alpha = \phi(t)^\alpha\phi'(t)$
$\int \phi'(t)(\phi(t))^\alpha dt = \frac{1}{\alpha+1}(\phi(t))^{\alpha+1} + C,\ (\text{ if } \alpha \neq -1)$

(a) $\int (5x+2)^{10} dx = \frac{1}{55}(5x+2)^{11} + C$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx = 2\sqrt{x-2} + C$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^3+1)^5}dx = \frac{-1}{12(x^3+1)^4} + C$

2. $\displaystyle\frac{d}{dt}e^{\phi(t)} = e^{\phi(t)}\phi'(t)$

$\displaystyle\int \phi'(t)e^{\phi(t)}dt = e^{\phi(t)} + C$

練習問題 9.2 以下の問題 1–4 においては、まず y の微分を考えよ。後の問題については、y として何を考えたら良いだろうか。

1. $y = (3x-2)^7$, $\displaystyle\int (3x-2)^6 dx$

2. $y = (x^3+2)^5$, $\displaystyle\int x^2(x^3+2)^4 dx$

3. $y = \left(x - \frac{2}{x}\right)^6$, $\displaystyle\int \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)\left(x - \frac{2}{x}\right)^5 dx$

4. $y = \frac{1}{(x^2+1)^3}$, $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)^4}dx$

5. $\displaystyle\int (x^4+3x)^{30}(4x^3+3)dx$

6. $\displaystyle\int (x^3+6x)^5(6x^2+12)dx$

7. $\displaystyle\int (x^2+4)^{10}x dx$

8. $\displaystyle\int (\frac{x^2}{2}+3)^2 x^2 dx$

9.3 定積分と微積分学の基本定理

微分の逆演算としての原始関数、不定積分について学びました。これは、微分は関数 $f(x)$ が与えられた時、$f'(x)$ を計算するものでした。$f(x)$ の原始関数は微分したら $f(x)$ になるような関数のことでした。$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とすると、$F'(x) = f(x)$ でした。これは、微分方程式を解くというような時に用いることができ、物理学の発展とともに整備されてきたものでした。積分にはもう一つのルーツがあります。それは、曲線で囲まれた面積をもとめるということです。多角形までは、どうにかなりますが、曲線で囲まれた図形のばあいは、段々近付けていくという極限の考えがどうしても必要です。そこで次のようなものを考えます。

定義 9.2 関数 $f(x)$ が、区間 $[a,b]$ で連続であるとする。分割 $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ と実数 $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ の集合 $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ に対して、

$$R_{\Delta,\{t_i\}}(f) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

を、リーマン和又は、積和という。分割 Δ を限りなく細かくしていくとき、(すなわち、

$$|\Delta| = \max\{|x_i - x_{i-1}| \mid i = 1, 2, \ldots\}$$

が、0 に近づくようにとっていくとき) $R_{\Delta,\{t_i\}}(f)$ が、$\{t_i\}$ の取り方に関係なく一定の実数 I に近づく。この I を $[a,b]$ 上 $f(x)$ の定積分と言い、

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

と書く。このことを記号的に、次のようにも書く。

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

例 9.8 たとえば $y = f(x) = x^2$ と x 軸と $x = 1$ で囲まれた部分の面積を考えましょう。これは、つぎのように表すことができます。

$$\int_0^1 x^2 dx$$

しかし、これを定義通り求めることができるでしょうか。

命題 9.1 関数 $f(x)$ と $g(x)$ は、区間 $[a,b]$ で連続であるとする。このとき、次が成り立つ。

(1) $\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$。

(2) $\displaystyle\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$、($k$ は、定数。)

(3) $a \leq x \leq b$ で、$f(x) \geq g(x)$ ならば、$\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$。

命題 9.2 (積分の平均値の定理) 関数 $f(x)$ が、閉区間 $[a,b]$ 上で連続ならば、ある、$c \in (a,b)$ で、

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

を満たすものがある。

証明.　関数 $f(x)$ は、閉区間 $[a,b]$ で連続だから、最大、最小をとる。最大値を M 最小値を m とすると、リーマン和の定義から、

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

これより、m と、M の間のある値 A で、

$$m(b-a) \leq A = \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

となる。$f(x)$ は、連続だから、中間値の定理により、m と、M の間の値は全てとる。従って、$f(c) = A$ を満たす $a < c < b$ を満たす c が存在する。これは、命題の、条件を満たすものである。 ■

$a < b$ のとき、

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx, \ \int_a^a f(x)dx = 0$$

と定義する。こう定義すると、b を変数とみなして、関数

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx$$

が定義できる。実は、こうすると、$x = a$ で、$F(x)$ が、連続であることが分かる。さらに、次が成り立つ。

$$\int_a^x f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^x f(x)dx$$

定理 9.3 (微積分学の基本定理) 関数 $f(x)$ が、閉区間 $[a,b]$ で連続であるとする。

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx$$

とすると、$F(x)$ は、開区間 (a,b) で、微分可能であり、$F'(x) = f(x)$ が成立する。

証明.　$a < c < b$ とする。

$$\begin{aligned}
\frac{F(x)-F(c)}{x-c} &= \frac{\displaystyle\int_a^x f(x)dx - \int_a^c f(x)dx}{x-c} \\
&= \frac{\displaystyle\int_c^x f(x)}{x-c} \\
&= f(d(x))
\end{aligned}$$

を満たす、点、$d(x)$ が、x と c の間にある。従って、$f(x)$ が、連続なことを考えると、

$$F'(c) = \lim_{x\to c} \frac{F(x)-F(c)}{x-c} = \lim_{x\to c} f(d(x)) = f(c)$$

これより、$F'(x) = f(x)$ を得る。 ■

さて、一般に、$F(x)$ を 関数 $f(x)$ の原始関数。すなわち、$F'(x) = f(x)$ を満たすものとする。すると、微分積分学の基本定理より、$\int_a^x f(x)dx$ も $f(x)$ の一つの原始関数だから、ある、定数 C が、存在して、

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx + C$$

と書ける。$x = a$ とおくと、$F(a) = C$ を得るから、$x = b$ とおくと、

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)dx$$

特に、

$$\int_a^x f(x)dx = F(b) - F(a)$$

を得る。これを、

$$\int_a^x f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x) \mid_a^b$$

ともかく。

例 9.9

$$F(x) = \int_0^x t^2 dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^x = \frac{1}{3}x^3.$$

たしかにこれを微分すると、微分積分学の基本定理により x^2 になります。また $x = 1$ とすると、上で考えた面積がわかります。

例 9.10 $f(x) = e^{x^2}$ の原始関数みなさんの知っている関数では書けないことが知られていますが、

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x e^{t^2} dt$$

とおくと、$F(x)$ は計算できませんが、$F'(x) = f(x) = e^{x^2}$ となっています。$f(x)$ の部分がもっと難しい関数でも同じです。

例 9.11 電力負荷平準化、グッピーの話し。